FOR THE PEOPLE
FOR EDVCATION
FOR SCIENCE

LIBRARY
OF
THE AMERICAN MUSEUM
OF
NATURAL HISTORY

Bound at
A.M.N.H.

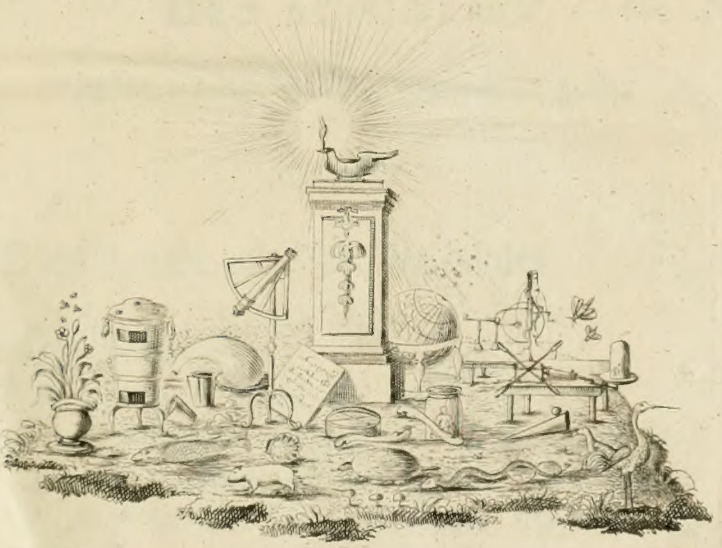
OF THE
AMERICAN MUSEUM
OF NATURAL HISTORY

ACTA
ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

5.06 (47.4)

pro Anno MDCCLXXX.

PARS PRIOR.



4/22/1916/Coll

PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM
MDCCLXXXIII.

16.70293 april 28

TABLE.

HISTOIRE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

MDCCLXXX. Janvier —— Juin.

VISITE de Leurs Alteſſes Impériales - - Pag. 3.

MÉTÉOROLOGIE.

Hyver de 1779 à 1780. - - - - 5.

Marche de l'aiguille magnétique obſervée pendant l'aurore boréale du 29 Février à la Haye & à Franeker: extraite d'une lettre de M. le Prof. van Swinden - - - - 10.

Extrait d'une lettre de M. le Brigadier Chevalier de Brekling, *concernant l'aurore boréale obſervée à Pleskow le 2 Mars* - - - 15.

Page.

Quantité de l'eau de pluie obſervée à St. Pétersbourg en 1778. 1779 *&* 1780 *par M.* Lexell - 17.

Hauteurs de l'eau dans la Néva obſervées par M. Lexell *en* 1778. 1779 *&* 1780. - 19.

OUVRAGES, *Machines & Inventions préſentées ou communiquées à l'Académie pendant le cours du premier ſémeſtre de l'année* 1780. - 26.

ACTA ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

ad Annum MDCCLXXX. Pars prior.

Cum tabulis XI. aeri inciſis.

MATHEMATICA Pag.

LEONH. EVLER. *Supplementum calculi integralis pro integratione formularum irrationalium.* - 3.

—— —— *Nova methodus fractiones quascunque rationales in fractiones ſimplices reſolvendi* - 32.

—— —— *Evolutio Producti infiniti*
$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)$ etc.
in ſeriem ſimplicem - - - - - - 47.

—— —— *De mirabilibus proprietatibus numerorum pentagonalium* - - - - - - - 56.

NICO-

Page.

NICOLAS FVSS. *Intégration d'une eſpèce remarquable d'équations différentielles dans l'Analyſe des fonctions à deux variables, par l'introduction de nouvelles variables* - - 76.

LEONH. EVLER. *Problematis cuiusdam* Pappi Alexandrini *conſtructio* - - - 91.

NICOLAVS FVSS. *Solutio Problematis Geometrici* Pappi Alexandrini - - - 97.

PHYSICO-MATHEMATICA

LEONH. EVLER. *De motu libero plurium corporum filis colligatorum ſuper plano horizontali* - 107.

—— —— *De vi fluminis ad naves ſurſum trahendas applicanda* - - - - 119.

—— —— *De ſtatum aequilibrii maris a viribus Solis et Lunae ſollicitati* - - - - 132.

W. L. KRAFFT. *Diſquiſitio de Methodo conſtruendi tabulas pro motu proiectilium in aëre reſiſtente* - - - - - 154.

PHYSICA

C. F. WOLFF. *De pullo monſtroſo, quatuor pedibus, totidemque alis inſtructo* - - - 203.

P. S. PALLAS. *Galeopithecus volans Camellii deſcriptus* - - - - - 208.

IOH. LEPECHIN. *Sertulariae ſpecies duae determinatae* - - - - - 223.

Page.

I. G. GEORGI. *Adipis porcinae, recentis & rancidae, examen chemicum* - - - 226.

ASTRONOMICA

LEONH. EVLER. *Determinatio facilis orbitae cometae cuius tranſitum per eclipticam bis obſeruare licuit* - - - - - 243.

—— —— *De variis motuum generibus, qui in ſatellitibus planetarum locum habere poſſunt* - 255.

—— —— *De motibus maxime irregularibus; qui in ſyſtemate mundano locum habere poſſent, vna cum methodo huiusmodi motus per temporis ſpatium quantumuis magnum proſequendi* - - - - - - 280.

A. I. LEXELL. *Recherches ſur la nouvelle planète, découverte par M.* Herſchel *& nommée* Georgium Sidus - - - - 303.

—— —— *Solutiones quorundam problematum aſtronomicorum ad doctrinam de motu planetarum & cometarum in ſectionibus conicis pertinentium* - - - - - - 330.

PETRVS INOCHODZOW. *Determinatio latitudinis et longitudinis vrbis* Orel, *deducta ex obſeruationibus aſtronomicis Anno* 1781 *habitis* - 370.

NICOLAS FVSS. *Nouvelles recherches ſur les inégalités dans le mouvement de la Terre cauſées par l'action de Venus* - - - 381.

STE-

Page.

STEPH. RUMOVSKI. *Locus Lunae ex occultatione γ virginis anno 1780 die $\frac{9}{15}$ Martii obſeruata determinatus* - - - - 399.

ERRATA.

Pag. 394. Poſtremorum quinque logarithmorum characteriſtica eſt 6.

HISTOI-

HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE
DES
SCIENCES.

HISTOIRE
DE L'ACADÉMIE.

MDCCLXXX.

Janvier — Juin.

Le vendredi 24 Janvier, l'Académie eut l'honneur de recevoir la viſite de Leurs Alteſſes Impériales Monſeigneur le Grand Duc & Madame la Grande Ducheſſe accompagnés de Son Alteſſe Séréniſſime Monſeigneur le Prince Frédéric Guillaume Charles de Würtemberg-Stuttgard, frere de Madame. Ces Auguſtes hôtes arriverent entre onze heures & midi.

S. E. Mr. le Directeur & Meſſieurs les Académiciens prépoſés au Cabinet d'Hiſtoire naturelle reçurent Leurs

Alteſſes au bas de l'eſcalier qui mène à la Bibliotheque, & Les conduiſirent par tous les Cabinets & Departemens académiques. L'Aſſemblée ordinaire des Académiciens & Adjoints Les reçut enſuite dans la ſalle de Conferences, & Mr. le Prof. *Güldenſtadt* eut l'honneur de montrer un *Corſac*, eſpece de petit Renard, que Mr. *Hablitzl*, Correſpondant de l'Académie venoit d'envoyer d'Aſtrachan pour le Cabinet académique.

Leurs Alteſſes Impériales & Monſeigneur le Prince de Würtemberg ſe rendirent de là au Departement de Geographie, à l'Imprimerie des Eſtampes & enfin au grand Globe de Gottorp; d'où Elles retournerent à la Cour, après avoir témoigné au Directeur & aux Académiciens Leur ſatisfaction dans les termes les plus gracieux.

ME-

MÉTÉOROLOGIE.

Hyver de 1779 à 1780, ſuivant le nouveau ſtile.

1.

Il neiga pour la premiere fois le 31 Octobre 1779 & pour la derniere fois le 5 Juin 1780. L'intervalle entre ces deux termes eſt de 219 jours.

2. Il géla pour la premiere fois le 13 Octobre, Thermomètre de Délisle 154^d, & pour la derniere fois le 5 Mai, Therm. 152^d. Cet intervalle entre la premiere & la derniere gélée eſt de 206 jours.

3. La Néva fut priſe pendant 142 jours, depuis le 1 Décembre où elle ſe couvrit des glaces du Ladoga par un froid de 170 degrés, jusqu'au 21 Avril qu'elle débacla par une température de 145^d. Les glaçons du Lac de Ladoga parurent le 29 Avril, & la riviere les charia jusqu'au 1. de Mai.

4. Depuis le 13 Octobre juſqu'au 5 Mai ſuivant, le plus grand froid a eté obſervé de 195^d le 18 Fevrier matin: Barom. 28. 08 ou 28 $\frac{1}{12}$ pouces de Paris, ciel ſerein, puis brouillard & petit vent du Nord. Le moindre froid ou la plus grande chaleur à midi a ete de 129^d le 26 Avril: Barom. 27. 75, ciel nubileux, petit vent du Sud, enſuite pluie. La difference entre ces deux temperatures extremes eſt de 66 degrés de Deliſle.

5. Le froid moyen au matin & au ſoir a été trouvé; depuis le 1er Novembre juſqu'au 1er Mai, 162 degrés
depuis le 1er Octobre juſqu'au 1er Juin, 157 ——
Le froid moyen à midi;
depuis le 1er Novembre juſqu'au 1er Mai, 155 degrés
depuis le 1er Octobre juſqu'au 1er Juin, 149 $\frac{1}{2}$ ——,

6. Le froid au matin & au ſoir a été depuis le 13 Octobre juſqu'au 5 Mai:

2 jours au delà de 190^d le 17. & 18. Février.
13 jours entre 180 & 190^d en Janvier & Février. (*)
25 jours entre 170 & 180 en Novembre — Mars. (**)
62 jours entre 160 & 170 en Novembre — Avril.
57 jours entre 150 & 160 en Octobre — Mai.
45 jours entre 140 & 150 en Octobre, Novembre, Février — Mai.
2 jours entre 130 & 140 en Octobre, le 25 & 26.

7. Le

(*) le 2 — 7. 12. 13 14 Janvier, & le 15. 16. 19. 20 Février.

(**) le 30 Nov. 2. 8 — 15. 18. 20. 28 29 Déc. 1. 9 22. 25. 26 28 — 31 Janvier, 5. 6. 9, 10. 14 Févr. & le 1. 2. 3 Mars.

7. Le froid à midi dans ce même intervalle de 206 jours d'hyver a été:

1 jour moindre que 130^d ſavoir le 26 Avril.
22 jours entre 140 & 130^d en Octobre, Mars — Mai. (*)
67 jours entre 150 & 140 en Octobre — Décembre, Février — Mai.
61 jours entre 160 & 150 en Novembre — Avril.
40 jours entre 170 & 160 en Novembre — Mars.
13 jours entre 180 & 170 en Décembre — Février. (**)
2 jours entre 190 & 180 le 17. 18. Février.

8. État du Baromètre depuis le 1er Novembre 1779 jusqu'au 1er Mai 1780:

La plus grande élévation 28. 98 le 9 Février à midi. (***)
La plus petite élévation 26. 88 le 30 Octobre matin (****) & le 4 Décembre à 4 heures du ſoir. (*****)
La variation totale - 2. 10 ou $2\frac{1}{10}$ pouces.
Le milieu - - 27. 93.
La hauteur moyenne 27. 86 c. à. d. $27\frac{86}{100}$ pouces de Paris.
Le Baromètre a été 80 jours au deſſus de $27\frac{9}{10}$; $57\frac{1}{2}$ jours au deſſus de 28 & $32\frac{1}{2}$ jours au deſſus de $28\frac{1}{10}$ pouces.

9. Les

(*) Le 18 --- 30 Oct. 16 Mars, 17. 23. 25 28. 30 Avril, & le 1. 3. 5 Mai.
(**) Le 1 Déc. 2 --- 6. 12. 13 25. 28 Janvier, & le 9 16. 19 Février.
(***) Therm 1-2, ciel entierement ſerein, & calme.
(****) Therm. 142, ciel couvert, forte pluie & vent du Sud,
(*****) Therm. 148, ciel couvert, neige, pluie & un gros vent du S - Ou.

9. Les vents forts pendant ce même intervalle de 6 mois d'hyver ont ſoufflé:

6 jours du *Nord* le 4 Nov. 17. Janv. 4. 5. 14. Févr. 7 Mars.

3 jours du N-E. le 5. 30 Nov. 19 Févr.

6 jours de *l'Eſt* le 8 Nov. 2. 13 Déc. 3. 21 Janvier, 23 Avril.

6 jours du S-E. le 6. 7. Nov. 15 Déc. 23 Janvier, 20 Févr. 19 Avril.

11 jours du *Sud* le 11. 14. 16. 20. 22 Nov. 26 Déc. 20. 22. Janv. 28 Févr. 4. 16 Mars.

10 jours du S-Ou. le 7. 12. 20. 23. 31 Déc. 26. 27 Févr. 5. 19 Mars, 7 Avril.

12 jours de *l'Oueſt* le 1. 21. Nov. 30 Déc. 2. 16 Janv. 13. 24 Fevr. 10. 11. 13. 18 Mars, 14 Avril.

9 jours du N-Ou le 7. 10. 12 Janv. 1 Fevr. 29. 31 Mars, 1. 2. 13 Avril.

10. Les vents très forts ſont venus:

3 jours du *Nord*: le 3 Nov. 18 Janv. 3 Mars.

1 jour de *l'Eſt* le 1 Décembre.

1 jour du S-E. le 25 Février.

9 jours du *Sud* le 17. 18 Nov. 14. 19. 24. 25. 27 Déc. 19 Janv. 5 Avril.

6 jours du S-Ou. le 19 Nov. 4. 22. Déc. 6. 22. 30 Mars.

4 jours de *l'Oueſt* le 21 Déc. 11. 15 Janv. 4 Avril.

11. Les

11. Les autres variations de l'Atmoſphère pendant ces 6 mois d'hyver ſont annotées dans la table ſuivante :

Atmoſphère.	1779. Nov.	Déc.	1780. Janv.	Fevr.	Mars.	Avril.	Somme.
Jours entier. ſereins	2	3	4	6	6	1	22
Jours entier. couv.	17	11	14	13	10	10	75
Brouillards - -	1	5	5	5	2	4	22
Pluie { médiocre	9	2	0	2	7	11	31
Pluie { copieuſe	2	0	0	0	0	0	2
Neige { médiocre	13	13	15	8	13	6	68
Neige { copieuſe	2	2	1	0	1	2	8
Aur. bor. { foibles	2	2	0	2	0	0	6
Aur. bor. { reſplend.	1	0	0	1	1	1	4

La quantité de l'eau de pluie & de neige tombée depuis le 12 Octobre jusqu'au 12 Avril a été trouvée de $3\frac{9}{13}$ pouces de Paris.

Marche de l'aiguille magnétique obſervée pendant l'Aurore boréale du 29 Février 1780 à la Haye & à Franeker.

Extraite d'une lettre de Mr. le Prof. *J. H. van Swinden* datée de Franeker & addreſſée au Secrétaire de Conférences *J. A. Euler*, le 23 de Mars.

Je me ſers à Franeker de trois aiguilles aimantées, placées dans une grande chambre, & à des diſtances trop grandes pour qu'elles puiſſent agir l'une ſur l'autre.

La premiere aiguille marquée No. A eſt à chappe de verre & faite à la façon ordinaire. Les deux autres No. 4 & No. 6. ſont faites ſous ma direction d'après les principes etablis dans la ſeconde partie de mes *Recherches ſur les Aiguilles aimantées* qui ont partagé le Prix de l'Académie de Paris en 1777. Il en eſt de même de l'aiguille No. 3. que mon frere l'Avocat *S. P. van Swinden* emploie à la Haye. Ces trois dernieres aiguilles ont à peu près les mêmes dimenſions & portent des *Nonius* pour l'Obſervation des minutes.

Les

Les aiguilles No. 4 & A, qui étoient d'accord en 1775, diffèrent à préſent de plus d'un degré: la premiere No. 4 marquant la plus grande déclinaiſon. Les aiguilles No. 4 et No. 6 ſont d'accord à quelques minutes près: tantôt l'une prévaut, tantôt l'autre. L'aiguille No. 3 employée par mon frère n'indique qu'une déclinaiſon *rélative*: ainſi je ſuppoſerai qu'elle a été d'accord avec No. 4, le 29 Fevrier à 8 heures du matin.

Comme il ne s'agit ici que des variations, j'indiquerai par o (*zero*) la plus petite déclinaiſon de chacune de mes trois aiguilles: elle a eu lieu à 9 h. 45′ du ſoir pour toutes les trois. Dans ce moment le No. 4 ſurpaſſoit de 51 minutes le No. A, & de 2 minutes ſeulement le No. 6.

Ces éclairciſſemens préallables m'ont paru néceſſaires. Voici maintenant le tableau des mouvemens des aiguilles No. A, No. 4, No. 6 à Franeker & de l'aiguille No. 3 à la Haye.

An. 1780	à Francker			à la Haye
Le 29 Févr.	No. A.	No. 4.	No. 6.	N. 3.
avant midi.	min.	min.	min.	min.
à 6. h.	38	36	31	
8.	40	40	35	40
9.	40	40	35	41
10.	42	42	37	41
11.	42	42	37	41
12.	45	45	39	41
après midi				
à 1. h.	25	25	25	48
1 30′	40	40	35	
2	54	54	53	50
3	25	20	13	48
4	20	20	13	46
5	38	35	35	
6	29	29	30	
7 15	35	60	61	
7 30				82
7 45				98
8	55	85	85	149
8 15				91
8 30	55	110	115	3
8 45	45	78	85	0
9	15	6	61	122–132
9 20				— 3 *
— —				3

An.

* — 3, c'eſt à dire 3′ plus à l'Eſt que le point que j'ai pris pour *Zero*.

An. 1780.	à Franeker			à la Haye
Le 29 Févr.	No. A.	No. 4.	No. 6.	No. 3.
après midi.	min.	min.	min.	min.
9 30	50	170	180	10
9 45	0	0	0	12
10	10	10	3	
10 12	30	30	28	
10 20				52
10 27	64	73	75	
10 45	40	35	40	
11	40	35	40	40
11 20				113
11 30	45	50	45	
11 45	50	73	70	103-109
12	55	90	35	13
12 15				77
12 30				71
1 Mars matin				
6 h. 30	38	38	41	
7	40	45	41	40
variation totale le 29 Févr.	64	170	180	152

Ces variations ont été, comme l'on voit, très conſidérables. Les aiguilles No. 4 & No. 6 ont eu à peu près la même marche, excepté à 9 h. du ſoir. Mais le No. A a beaucoup différé des deux autres aiguilles à

 tous

tous égards, ſoit pour le moment de la plus grande déclinaiſon, ſoit pour la grandeur totale de la variation: cependant cette aiguille eſt également mobile: auſſi eſt elle revenue le lendemain au point d'où elle etoit partie: la veille ſa difference du No. 4 étoit de 50′, quelque fois de 54′: le lendemain de 51′ à 56′: mais pendant la durée du phénomène la difference a quelquefois été de 171′ ou 2$^{d.}$ 51′, comme à 9 h. 30′ du ſoir, & quelquefois ſeulement de 42′, comme à 9 h. (*) Ces differences rentrent dans les idees générales que j'ai propoſées dans le mémoire cité & que j'avois déduites d'un très grand nombre d'obſervations: ſavoir que ces variations dépendent en grande partie des aiguilles mêmes & des changemens qui arrivent aux forces de leurs parties homologues.

Les variations obſervées à la Haye comparées à celles de Francker produiſent des phénomènes aſſés remarquables quant aux momens auxquels les plus grandes & les plus petites déclinaiſons ont eu lieu. La plus grande a été obſervée à 9 h. 30′ pour les aiguilles No. 4 & No. 6: elle etoit alors la plus petite à la Haye: de ſorte qu'à cet inſtant la différence entre les aiguilles No. 3 et No. 4, ſuppoſée nulle à 8 h. du matin, montoit à 160′ ou 2$^{d.}$ 40′. La declinaiſon a été la plus grande à la Haye à 8 h. du ſoir, enſuite à 9 h. & à 11 h. 20′: elle etoit alors à Francker à peu près au terme moyen, ou beaucoup au deſſous: & la grande difference qu'il y a eu à Francker même à 9 h. du ſoir, entre le No. 4 & le No. 6 eſt tres remarquable. Peut-être le No. 4 a-t-il réelle-

(*) En ajoutant à la difference que donne la Table, les 51 minutes, dont No. 4. ſurpaſſoit N. A. pag. 11.

réellement varié pendant que j'allois de No. 4 au No. 6: car on ſent bien que je ne ſaurois obſerver les trois aiguilles à la fois: or par la diſpoſition des bouſſoles dans ma chambre, je commence l'obſervation alternativement par No A ou No. 6 & le No. 4 eſt toujours la ſeconde aiguille que j'obſerve.

Les jours précédens & ſuivans la marche des trois aiguilles a été très réguliere, & la déclinaiſon de moyenne grandeur: excepté le 2 de Mars entre 9 & 10 h. du ſoir: l'aiguille No. A a varié dans cet intervalle de 10′ Ou. l'aiguille No. 4 de 27′ Ou. l'aiguille No. 6 de 26′ Ou; variations qui ſont irrégulieres tant par leur grandeur, que parcequ'elles ſe ſont faites à l'Oueſt & non à l'Eſt. Le Ciel étoit alors fort couvert & il pleuvoit; mais on m'a dit que la nuit il y avoit eu une très belle Aurore boréale. Le lendemain matin à 6 h. le No. A étoit rétrogradé de 6′ E, le No. 4 de 22′ E, & le No. 6 de 27′ E.

Extrait

d'une lettre de M. le Brigadier Chevalier *de Brekling* addreſſée à M. le Prof. *Beſac* & communiquée à l'Académie dans ſa Séance du 1 Mai.

de Pleskow le 14 *Mars* 1780.

Nous eumes le 20 Février v. ſt. (*) une Aurore boréale des plus reſplendiſſentes. Le Ciel qui ſe trouvoit cou-

(*) C'eſt à dire le 2 Mars nouveau Stile.

couvert le matin, s'éclaircit vers midi, & le temps fut très calme. L'aurore boréale commença vers 10 h. & obtint à minuit ſa plus forte ſplendeur: elle paſſa notre zénith & couvrit les trois quarts de tout l'horizon: il n'y avoit que l'eſpace entre l'Eſt & le Sud que ne fut pas enluminé. Les jets furent terminés & reſſembloient à des faiſceaux de fuſées qui furent lancés au delà du zénith.

Le Baromètre étoit pendant ce temps à la hauteur de $28 \frac{72}{100}$ pouces d'Angleterre (*) & le Thermomètre de Reaumur à 14 degrés au deſſous du point de congélation. Ce froid s'augmenta vers le matin du 21 Fevrier jusqu'à 16 degrés. Le plus grand froid que nous avons eu cet hyver a été de 24 degrés le 7 de Février au matin. Au reſte cette aurore boréale n'a pas été jusqu'ici ſuivie d'autres, & les froids ont depuis diminué conſidérablement.

(*) 27, 87 pouces de France, ou 27 pouces 10 lignes & demie.

Quan-

Quantité de l'eau de pluie obſervée à Saint-Pétersbourg en 1778, 1779 & 1780.

par *M. Lexell.*

	Années		
Mois.	1778.	1779.	1780.
Janvier	pouces	0, 422	0, 260
Février	d'An-	0, 340	0, 214
Mars	gleterre	0, 735	0, 665
Avril	0, 467	2, 588	1, 348
Mai	1, 600	2, 581	1, 088
Juin	0, 322	0, 728	pouces
Juillet	3, 019	1, 446	d'Angle-
Août	1, 446	1, 084	terre.
Septembre	2, 603	2, 276	
Octobre	0, 769	0, 923	
Novembre	1, 005	0, 620	
Décembre	1, 019	0, 835	

L'Inſtrument employé pour faire ces obſervations eſt un entonnoir quarré de fer blanc, dont chaque côté contient 20 pouces d'Angleterre. La pluïe en ſort au moyen d'une pipe ſoudée à l'entonnoir, & s'écoule dans un réſervoir fait pour la ramaſſer. Enſuite en verſant

l'eau de ce reſervoir, on en determine la quantité par une meſure cubique de cuivre jaune, dont chaque côté eſt de 2 pouces d'Angleterre, & dont la hauteur eſt diviſée en 20 parties égales.

En ſuppoſant donc qu'il eſt tombé une pouce de pluie, il y aura dans le reſervoir 400 pouces cubiques d'eau, parceque l'ouverture de l'entonnoir eſt de 400 pouces en quarré. Mais comme la meſure contient 8 pouces cubiques, il faudra la remplir 50 fois pour épuiſer les 400 pouces cubique du reſervoir, & par conſéquent la quantité de la meſure marquera la cinquantieme partie d'un pouce d'eau de pluie tombée. De même chaque diviſion laterale en marquera une millieme partie.

Malgré le ſoin employé pour noter auſſi exactement qu'il a eté poſſible la quantité de l'eau de pluïe tombée, on ne ſauroit garantir ces obſervations comme entierement exactes, vû qu'on n'a eu d'autre emplacement pour cet inſtrument que la gallerie de l'obſervatoire, où même on n'a pas pu l'eloigner aſſés du bâtiment, pour qu'un vent un peu fort venant de ce coté là, n'empechât pas l'inſtrument de recevoir toute la quantité de pluie qu'il recevroit, ſi rien n'empechoit la pluie d'y tomber de tous cotés. On prétend auſſi avoir remarqué en Angleterre, qu'il tombe à une certaine hauteur de la terre une quantité de pluie beaucoup moindre, que tout près d'elle.

Hau-

Hauteurs de l'eau dans la Néva obſervées par Mr. *Lexell* en 1778. 1779 & 1780.

Année 1778.	Juin.	Juillet	Août.	Sept.	Oct.
1		− 2	+ 6	+ 5	− 10
2		− 2	+ 14	− 4	− 1
3		+ 2	+ 14	− 2	− 1
4		+ 2	+ 2	+ 6	+ 1
5		+ 3	+ 7	+ 5	+ 4
6		− 1	+ 2	+ 2	− 5
7		− 3	+ 2	+ 1	− 5
8	− 6	− 3	+ 3	− 1	+ 0
9	− 6	− 5	+ 4	+ 5	+ 2
10	− 6	− 6	+ 3	+ 6	+ 4
11	+ 8	− 6	+ 3	− 2	+ 3
12	− 2	− 7	+ 1	+ 1	− 4
13	− 2	+ 5	− 3	+ 7	− 7
14	+ 3	+ 1	− 2	+ 3	− 2
15	+ 0	+ 1	+ 3	+ 2	+ 17
16	− 2	+ 5	+ 0	+ 2	+ 7
17	+ 6	+ 3	+ 1	+ 0	+ 2
18	+ 5	− 2	+ 6	+ 15	+ 6
19	+ 0	+ 2	+ 4	+ 9	+ 1
20	− 5	+ 4	+ 5	− 1	+ 2
21	− 3	+ 0	+ 2	− 5	+ 6
22	+ 2	+ 2	+ 0	− 10	− 2
23	+ 7	+ 1	− 1	− 7	− 3
24	− 3	+ 0	+ 1	− 14	− 6
25	+ 1	+ 0	+ 8	− 1	− 6
26	− 4	− 1	− 1	− 4	− 7
27	− 7	+ 6	− 2	− 2	− 7
28	− 4	+ 4	− 3	− 5	− 8
29	− 2	+ 2	− 3	− 12	
30	− 2	+ 1	− 7	− 21	
31		+ 2	− 6		

Année 1779.

Jour du mois	Févr.	Mars	Avr.	Mai.	Juin.	Juill.
1	− 2	− 3	+ 6	− 1	− 6	+ 3
2	+ 3	− 2	+ 11	+ 1	− 5	+ 1
3	− 5	+ 6	+ 5	− 2	− 4	− 1
4	+ 3	− 4	+ 1	− 4	− 6	+ 0
5		− 1	+ 23	+ 1	− 5	+ 0
6		− 1	+ 11	+ 2	− 4	− 7
7		− 1	+ 16	− 5	− 6	+ 3
8	+ 5	+ 0	+ 3	+ 2	− 8	+ 0
9	+ 6	− 2	+ 2	+ 0	− 5	+ 2
10	+ 8	+ 1	+ 1	+ 5	− 1	+ 0
11	+ 3	− 6	+ 8	+ 0	+ 1	− 1
12		+ 0	− 2	+ 0	− 2	+ 0
13	+ 4	− 2	− 1	+ 5	− 4	− 2
14	+ 4	− 2	+ 1	+ 0	− 6	− 2
15	+ 2	+ 0	+ 5	− 2	− 5	− 3
16	+ 3	+ 0	+ 4	− 2	− 3	− 3
17	+ 5	+ 2	+ 0	− 2	− 3	− 2
18	+ 6	+ 4	− 1	− 6	− 2	− 2
19	− 2	+ 1	+ 5	− 4	− 3	− 2
20		+ 1	+ 6	+ 2	+ 6	+ 5
21	− 2	− 1	− 3	− 3	+ 4	+ 0
22	+ 5	+ 1	− 4	− 10	− 2	+ 0
23	+ 6	+ 2	− 2	− 3	+ 0	+ 2
24	+ 5	+ 3	− 4	− 5	+ 0	− 2
25	+ 4	+ 5	+ 10	− 4	− 3	+ 0
26	+ 4	+ 2	+ 3	− 4	− 3	+ 0
27	− 2	+ 5	+ 1	− 4	− 2	− 1
28	+ 0	+ 4	− 2	− 4	− 3	− 2
29		+ 1	− 1	− 6	− 1	− 2
30		+ 6	− 5	− 6	− 1	− 4
31		+ 4		− 6		− 3

An-

Année 1779.

Jour du mois	Août	Sept.	Oct.	Nov.	Déc.
1	−4	+5	−6	+0	+2
2	−8	+5	−6	+2	+3
3	−7	+5	−6	+4	+1
4	−5	+8	−4	+2	−2
5	−5	+9	+0	+1	+3
6	−4	+6	−1	−3	+2
7	−3	+6	+0	−3	+3
8	−3	+3	+1	−3	+0
9	−1	+14	−3	−10	−2
10	−2	+3	−5	+5	−6
11	+1	+5	+2	−13	+3
12	−2	+5	+2	−2	+8
13	−3	+8	+2	+2	+14
14	−2	+2	+3	−5	+4
15	+2	+2	+1	−10	+3
16	+0	+1	−3	−6	+10
17	−1	+1	+1	−5	+2
18	−3	+2	+2	+0	+3
19	−2	+1	+5		+3
20	+1	−2	+7		+6
21	+1	−2	+8		+0
22	+2	+2	+13		−5
23	+0	+2	+13	−1	−3
24	−1	+1	+6	+3	+2
25	−1	−1	−2	+2	
26	−4	−4	−2	+17	
27	−2	−6	−2	+5	−1
28	+7	−5	−2	+7	+3
29	+3	−5	+0	+5	+3
30	+4	−5	+0	+4	−3
31	+5		+0		+16

Année 1780.

Jour du mois	Janv.	Févr.	Mars	Avr.	Maï.
1		− 1	+ 9	+ 2	− 4
2		− 1	+ 0	+ 2	− 4
3		+ 0	+ 6	+ 1	− 6
4	+ 8	+ 2	+ 3	− 1	− 8
5	+ 3	+ 0	+ 2	− 1	− 7
6	+ 0	− 1	+ 4	+ 0	− 6
7	+ 0	− 2	+ 4	+ 1	− 5
8	− 2	− 1	+ 6	+ 4	+ 0
9		+ 3	+ 8	+ 5	− 7
10	+ 0	+ 1	+ 12	+ 5	+ 8
11	+ 2	− 1	+ 11	+ 5	+ 3
12	+ 1	+ 0	+ 6	+ 0	+ 3
13	+ 3	+ 1	+ 9	− 5	+ 1
14	+ 2	+ 5	+ 6	− 7	− 1
15	+ 1	+ 10	+ 6	− 7	+ 0
16	+ 0	− 1	+ 4	− 8	+ 0
17	+ 0	+ 4	+ 5	− 8	− 1
18	− 2	+ 3	+ 5	− 4	+ 0
19	− 1	+ 2	+ 5	− 6	+ 0
20	− 1	+ 1	+ 8	+ 2	− 1
21	− 2	+ 2	+ 7	+ 1	+ 4
22	− 2	+ 5	+ 6	− 5	+ 1
23	− 2	+ 4	+ 1	− 2	+ 2
24	− 2	+ 5	− 3	− 4	+ 4
25	− 1	+ 8	+ 2	− 6	+ 15
26	− 1	+ 5	+ 1	− 7	+ 5
27	+ 0	+ 8	+ 2	− 6	+ 0
28	− 1	+ 8	+ 3	− 4	+ 6
29	− 2	+ 9	+ 3	− 4	+ 6
30	− 1		+ 2	− 6	+ 6
31	− 1		+ 1		+ 2

Re-

Remarques ſur ces obſervations.

1. L'Echelle qu'on a employée pour évaluer les hauteurs de l'eau dans la Néva, eſt diviſée en Verſchoks, dont 16, comme il eſt connu, ſont une Arſchine de Ruſſie. Or cette meſure étant égale à 26 pouces, $6\frac{1}{10}$ lignes, meſure de France, il eſt très aiſé de réduire ces obſervations, qui marquent la hauteur de l'eau, au deſſus ou au deſſous de ſa hauteur moyenne exprimée en Verſchoks, à quelque autre meſure connue.

2. Pour établir une valeur exacte de la hauteur moyenne, on a déterminé pour chaque mois ſéparement les hauteurs moyennes & enſuite de ces déterminations, dont la différence n'étoit pas fort ſenſible, on a pris un réſultat moyen, qui devoit marquer la hauteur moyenne de l'eau. En procédant de cette façon, la diviſion de l'echelle marquée par 26 Verſchoks eſt trouvée correſpondante à la hauteur moyenne. Cependant en cas que quelque faute ſe ſoit gliſſée dans cette détermination, on peut aiſément la découvrir pas les obſervations mêmes, où pourtant il paroit raiſonable, d'exclure de cette recherche celles, qui s'éloignent plus que de 10 Verſchoks de la hauteur moyenne.

3. Pour l'ordinaire ces obſervations ont été faites le matin, vers 8 ou 9 heures. On auroit bien pu ſe donner la peine de les répéter pluſieurs fois le jour; mais ordinairement cette aſſiduité auroit été ſuperflue, lorsque la hauteur de l'eau d'un jour à l'autre, ne change que fort peu.

4.

4. Quand on ſe propoſe de faire uſage de ces obſervations, àfin d'en conclure les cauſes, qui peuvent avoir quelque influence, pour faire, ou baiſſer, ou monter l'eau dans la riviere; il faut neceſſairement les comparer avec les obſervations metéorologiques faites chaque jour & ſur tout celles qui marquent l'etat du ciel, la direction & la force du vent & la quantité de pluie. Ainſi la raiſon, pourquoi dans le mois de Juillet 1778 la hauteur de l'eau étoit presque toujours au deſſus de la hauteur moyenne, eſt probablement, qu'il tomboit dans ce mois une quantité de pluie très conſidérable. Mais l'an 1779 dans le mois de Juillet, la hauteur de l'eau étoit pour la plus part du tems au deſſous de la hauteur moyenne; auſſi ne tomboit-il pendant ce mois, que fort peu de pluie.

5. Depuis le tems, que ces obſervations ont été commencées, leur Auteur a auſſi remarqué les crues extraordinaires de l'eau dans la Neva, dont les principales ſont:

l'An 1778.

le 2 d'Aouſt à	10^h. avant midi	+ 26	Verſchock.
	10. $30'$. - -	+ 28	
	12. - - -	+ 32	
	2. après midi	+ 34	
	3. - - -	+ 30	

l'An 1779.

le 5 d'Avril à	8^h. avant midi	+ 26	Verſchock.
	9. - -	+ 24	
	10. - -	+ 18	
le 8 Sept.	pendant la nuit -	+ 26	
le 10 Décemb.	pendant la nuit	+ 35	
le 12 - - à	2^h. après midi	+ 36	

l'An 1780.

le 29 Mai à	7^h. matin	+ 22	Verſchock.

OUVRAGES, MACHINES ET INVENTIONS

préſentées ou communiquées à l'Académie pendant le cours du premier ſémeſtre de l'année 1780.

Dans l'Aſſemblée du Vendredi 10 Janvier, M. le Profeſſeur *Gulaerſtädt* a lu une lettre de M. *Elterlein* datée de Witegra le 24 Déc. 1779 (*) qui lui mande qu'ayant mis le 23 au ſoir pendant un froid de 205 degrés, trois onces de mercure dans une taſſe de porcelaine, au grand air; cette maſſe s'étoit trouvée gelée le lendemain matin, le Thermomètre ayant baiſſé jusqu'au 224 degré: & qu'elle n'a enſuite repris ſa fluidité parfaite qu'au 209ᵉ degré.

Le 17 Janvier M. l'Adjoint *Ozeretskofsky* a remis un extrait des expériences faites ſur l'électricité de la glace

---

(*) Situé dans le Gouvernement de Novgorod sous une latitude de 60° 52′ & à 6 degrés à l'Est de St. Pétersbourg.

glace par M. *Achard*, académicien de Berlin, que Meſſieurs de l'Univerſité de Straſbourg lui ont adreſſé pour le préſenter à Mrs. le Phyſiciens de l'Académie de St. Pétersbourg. (*).

Le 20 Janvier. Le Secrétaire de Conférences *J. A. Euler* a préſenté de la part de M. *Jean Bernoulli* Aſtronome royal à Berlin, le 6[e] cahier de ſes nouvelles littéraires de divers pays.

—— —— il a lu une lettre adreſſée à S. E. Mr. *de Domaſchnew* par *le P. Drojat*, Prêtre au verbe incarné, datée de Grénoble le 25 Nov. 1779, qui envoie deux mémoires qu'il dédie à Sa Majeſté l'Impératrice; ſavoir

Nouveaux phénomenes d'optique; ou propriétés ſingulieres, qu'a un cercle, ou un autre corps d'une figure quelconque, percé d'un petit trou.

Nouvelle maniere très-ſimple de déterminer par le calcul, quel que puiſſe être le rapport de la réfraction, le foyer des rayons, ſoit parallèles, ſoit divergens ou convergens, dans leur incidence ſur une lentille quelconque.

—— —— il a lu une lettre de S. E. Mr. le Prince *Dimitri de Golitzin*, Envoyé extraordinaire de la Cour Impériale à la Haye, qui fait mention d'une nouvelle eſpèce

d 2 de

(*) Ces expériences n'ont pas reuſſi à St. Pétersbourg malgré qu'il y fait des froids plus grands que de 20 degrés de Réaumur. Les glaces ſe ſont toujours manifeſtées comme des conducteurs & jamais comme des corps iſolans.

de Thermomètres propres pour meſurer les grands degrés de chaleur, imaginée par M. *Achard* académicien de Berlin.

Le 24 Janvier. Viſite de Leurs Alteſſes Impériales Msgr. le Grand-Duc & Madame la Grande-Ducheſſe, accompagnées de S. A. S$^{me.}$ Msgr. le Prince *Fréderic-Guillaume* de Würtemberg frère de Madame. Voyez ci-deſſus pag. 3.

Le 31 Janvier. Un Chirurgien a remis de la part de S. E. Mr. le Gouverneur Général de Smolensk Prince *de Repnin*, un monſtre humain à deux viſages dont une payſanne eſt accouchée après l'avoir porté ſept mois. (*).

Le 3 Fevrier. Le Secrétaire a préſenté de la part de M. *Scopoli*, Conſeiller & Profeſſeur à Pavie, le catalogue imprimé des plantes du nouveau jardin botanique inſtitué par Ordre de S. M. l'Impératrice-Reine.

Le 7 Fevrier. Le Secrétaire a lu une lettre de M. le Prof. *van Swinden* à Franeker, qui envoie le Plan de ſon Traité ſur l'Aurore boréale, tel qu'il ſe trouve inſéré au Journal des ſavans, & qui fait part des ſes remarques ſur quelques agitations extraordinaires de l'aiguille magnétique obſervées en 1780.

Le 24 Fevrier. M. l'Adjoint *Géorgi* a lu une lettre adreſſée à M. le Prof. *Pallas* par M. le Translateur *Jäh-*

(*) Peu de temps après la naiſſance de ce monſtre, la mère accoucha encore d'une fille bien conformée, mais qui mourut d'abord après la naiſſance. La mère s'eſt rétablie & vit encore.

Jährig, qui communique les obſervations intéreſſantes & en grande partie minéralogiques qu'il a faites dans le Déſert entre l'Oural & la Volga.

Le 9 Mars. Le Secrétaire a préſenté un écrit circulaire, par lequel M. le Docteur *Stagg* à Vilna invite les médecins à donner leur ſentiment ſur une amauroſe ou goutte ſeraine, dont ſe trouve attaqué le fils d'un Seigneur Polonois.

Le 13 Mars. Le Secrétaire a préſenté de la part de M. *Le Robbergherr de Vauſenville*,

Eſſai Phyſico-Géométrique contenant 1° la Détermination du centre de gravité d'un ſecteur de cercle quelconque. 2° La Réſolution géometrique du Problème de la quadrature définie du cercle: expoſé à la cenſure du Public & dédié à Sa Sainteté & aux Monarques.

L'Auteur ſomme l'Académie d'examiner cet eſſai & de lui en communiquer ſon ſentiment. L'Académie de ſon coté ayant fermement réſolu de ne plus répondre à ces prétendus inventeurs de la quadrature de cercle, la brochure de M. de *Vauſenville* a été miſe au rebut.

—— —— M. le Prof. *Güldenſtädt* a rémis de la part de M. *Hablitzl'*, correſpondant de l'Académie à Aſtrachan deux poiſſons conſervés dans l'eſprit de vin; un *Serougha* & un *Eſturgeon*, qui ont été dépoſés au cabinet d'hiſtoire naturelle.

Le 30 Mars M. le Prof. *Güldenſtädt* a encore remis de la part de M. *Hablitzl* une eſpèce d'eſturgeon conſervé dans de l'eſprit de vin & nommée *Schipcoſſéra* qui a été dépoſé au cabinet d'hiſtoire naturelle.

—— —— M. le Prof. *Laxmann* a préſenté une collection de ſemences de la part de M. le D. *Helenius* Démonſtrateur en Botanique au Jardin de l'Univerſité d'Abo.

Le 1 Mai. Le Secrétaire a préſenté

Obſervation d'une Aurore boréale très reſplendiſſante annotée par M. le Brigadier Chevalier de *Brekling* à Pleskow le 20 Fevrier 1780.

& de la part de M. le Prof. *van Swinden* à Francker:

Marche de l'aiguille aimantée obſervée à la Haye & à Francker pendant l'Aurore boréale du 29 Fevrier 1780.

voyez ci-deſſui pag. 10 & 15:

—— —— M. le Prof. *Laxmann* a remis diverſes ſemences rares, que M. le Prof. *Allioni* de Turin lui a envoyées pour l'Académie.

Le 8 Mai. Le Secrétaire a préſenté:

1) de la part de l'Académicien externe, *M. B. Wilſon* à Londres

Reaſons for diſſenting from the Report of the committee appointed to conſider of M. *Wilſon's* Experiments by *Samuel Musgrave.*

2) de la part de M. *Launay*, de l'Académie Impériale & Royale des Sciences & Belles-Lettres de Bruxelles.

Mémoire ſur l'Orichalque des anciens, précedé de quelques obſervations ſur le *Lapis aeroſus* de Pline.

3) de la part de M. l'Abbé *Mayer*, Aſtronome de S. A. Séréniſſime Msgr. l'Electeur Palatin

De novis in coëlo ſidereo phaenomenis in miris ſtellarum fixarum comitibus *Mannhemii* detectis.

Le 18 Mai. Le Secrétaire a préſenté de la part du Lord Vicomte *Mahon*,

Principles of Electricity containing divers new Theorems and Experiments together with an Analyſis of the ſuperior advantages of high and pointed Conductors.

Le 5 Juin. Le Secrétaire a préſenté de la part de l'Auteur M. *Louis Bertrand*, Profeſſeur de Mathématique à Génève,

Developpement nouveau de la partie élémentaire des Mathématiques, priſe dans toute ſon étendue.

Le 19 Juin. Le Secrétaire a préſenté de la part de la Societé royale des Sciences de Londres,

Philoſophical Transactions of the royal Society of London. Vol. LXIX. for the Year 1779. Part I.

&

& de la part de M. de *Magellan* à Londres :

1. Deſcription & uſages des nouveaux Baromètres, pour meſurer la hauteur des montagnes & la profondeur des mines.

2. Eſſai ſur la nouvelle Théorie du feu élémentaire & de la chaleur des Corps : avec la deſcription des nouveaux Thermomètres, deſtinés particulierement aux obſervations ſur ce ſujet.

MATHE-

MATHEMATICA.

SVPPLEMENTVM
CALCVLI INTEGRALIS
PRO
INTEGRATIONE FORMVLARVM IRRATIONALIVM.

Auctore
I. EVLERO.

Problema I.

§. 1.

Si functio X *praeter ipſam variabilem* x *etiam formulam irrationalem* $s = \sqrt{(a + bx)}$ *inuoluat: ita tamen, vt* X *ſit functio rationalis binarum quantitatum* x *et* s, *formulam differentialem* X d x *ab irrationalitate liberare.*

Solutio.

Cum irrationalitas tantum in formula $s = \sqrt{(a + bx)}$ inſit: hanc tantum ita per idoneam ſubſtitutionem tolli

 oportet,

portet, vt inde valor ipſius x non fiat irrationalis. Hoc autem praeſtabitur, ponendo $a + bx = zz$, vt fiat $s = z$ et $x = \frac{zz - a}{b}$, hincque $dx = \frac{2}{b} z\,dz$; quibus valoribus ſubſtitutis tota formula differentialis $X\,dx$, ad rationalem, nouam variabilem z complectens, perducitur.

Exemplum 1.

§. 2. Si fuerit $dy = \frac{dx}{\sqrt{(a + bx)}}$, ſeu $dy = \frac{dx}{s}$, poſito $\sqrt{(a + bx)} = z$, fiet $dy = \frac{2}{b} dz$, et integrando $y = \frac{2z}{b}$, vnde facta ſubſtitutione colligitur $y = \frac{2}{b}\sqrt{(a + bx)} + C$.

Exemplum 2.

§. 3. Si fuerit $dy = dx\sqrt{(a + bx)} = s\,dx$, ſumto $\sqrt{(a + bx)} = z$ erit $dy = z\,dx = \frac{2}{b} zz\,dz$, vnde integrando fit $y = \frac{2}{3b} z^3$, et facta ſubſtitutione prodit

$$y = \frac{2}{3b}(a + bx)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Quod integrale ſi debeat euaneſcere facto $x = 0$, fiet $C = -\frac{2a\sqrt{a}}{3b}$, ideoque

$$y = \frac{2(a + bx)^{\frac{3}{2}} - 2a\sqrt{a}}{3b}.$$

Exemplum 3.

§. 4. Si fuerit $dy = \frac{x\,dx}{\sqrt{(a + bx)}}$, facta ſubſtitutione $\sqrt{(a + bx)} = z$, crit

$$dy = \frac{2(zz - a)\,dz}{bb} = \frac{2zz\,dz - 2a\,dz}{bb},$$

vnde

vnde fit integrando $y = \frac{2}{3bb} z^3 - \frac{2a}{bb} z + C$, et facta reſtitutione

$$y = \frac{2}{3bb} (a + bx)^{\frac{3}{2}} - \frac{2a}{bb} \sqrt{(a + bx)} + C$$
$$= \frac{2\sqrt{(a+bx)}}{bb} (\tfrac{1}{3} bx - \tfrac{2}{3} a) + C.$$

Exemplum 4.

§. 5. Si fuerit $dy = \frac{dx}{(a+bx)^{\frac{3}{2}}}$, facta ſubſtitutione $\sqrt{(a + bx)} = z$ erit $dy = \frac{dx}{z^3}$; quae formula porro ob $dx = \frac{2zdz}{b}$ abit in $dy = \frac{2dz}{bzz}$, qua integrata fit $y = -\frac{2}{bz}$, ſeu facta reſtitutione, $y = \frac{-2}{b\sqrt{(a+bx)}} + C$. Vbi notetur, pro C ſumi debere $\frac{2}{b\sqrt{a}}$.

Problema 2.

§. 6. *Si fuerit* X *functio quaecunque rationalis binarum quantitatum* x *et* s, *exiſtente* $s = \sqrt[3]{(a + bx)}$, *formulam differentialem* X d x *ab irrationalitate liberare.*

Solutio.

Ponatur $\sqrt[3]{(a+bx)} = z$, vt ſit $s = z$, erit $a + bx = z^3$, hincque $x = \frac{z^3 - a}{b}$ et $dx = \frac{3zzdz}{b}$; quibus valoribus ſubſtitutis tota formula fiet rationalis.

Exemplum 1.

§. 7. Si fuerit

$dy = \frac{dx}{\sqrt[3]{(a+bx)}} = \frac{dx}{s}$, poſito

$\sqrt{(a}$

$\sqrt[3]{(a+bx)} = z$ et ſubſtituto valore hinc nato $dx = \frac{3zzdz}{b}$, erit $dy = \frac{3zdz}{b}$, vnde integrando fit

$$y = \frac{3}{2b}zz = \frac{3}{2b}\sqrt[3]{(a+bx)^2} + C.$$

Exemplum 2.

§. 8. Si fuerit

$$dy = \frac{dx}{\sqrt[3]{(a+bx)^2}} = \frac{dx}{ss},$$ poſito

$\sqrt[3]{(a+bx)} = z$ fiet $dy = \frac{3dz}{b}$, hinc integrando

$$y = \frac{3}{b}z = \frac{3}{b}\sqrt[3]{(a+bx)} + C.$$

Exemplum 3.

§. 9. Si fuerit $dy = dx\sqrt[3]{(a+bx)} = s\,dx$, facta ſubſtitutione fit $dy = \frac{3z^3dz}{b}$, hinc integrando

$$y = \frac{3}{4b}z^4 = \frac{3}{4b}(a+bx)\sqrt[3]{(a+bx)} + C.$$

Problema 3.

§. 10. *Si fuerit* X *functio rationalis binarum quantitatum* x *et* s, *exiſtente* $s = \sqrt[n]{(a+bx)}$, *formulam differentialem* X d x *ab irrationalitate liberare.*

Solutio.

Ponatur $\sqrt[n]{(a+bx)} = z$, vt ſit $s = z$, erit $a+bx = z^n$, hinc $x = \frac{z^n - a}{b}$ et $dx = \frac{nz^{n-1}dz}{b}$; quibus valoribus ſubſti-

ſubſtitutis formula propoſita X dx certe fiet rationalis, ſi modo numerus exponentialis n fuerit integer.

Exemplum 1.

§. 11. Si fuerit

$$dy = \frac{dx}{\sqrt[n]{(a+bx)}} = \frac{dx}{s},$$ poſito

$\sqrt[n]{(a+bx)} = z$ ob valorem inde natum $dx = \frac{nz^{n-1}dz}{b}$ habebitur $dy = \frac{nz^{n-2}dz}{b}$; vnde integrando colligimus

$$y = \frac{n}{b(n-1)} z^{n-1} + C,$$ ſiue reſtitutis valoribus

$$y = \frac{n}{b(n-1)} (a+bx)^{\frac{n-1}{n}} + C = \frac{n}{b(n-1)} \frac{a+bx}{\sqrt[n]{(a+bx)}} + C.$$

Exemplum 2.

§. 12. Si fuerit

$$dy = \frac{dx}{\sqrt[n]{(a+bx)^\lambda}} = \frac{dx}{s^\lambda},$$ poſito

$\sqrt[n]{(a+bx)} = z$ et ſubſtituto valore $dx = \frac{nz^{n-1}dz}{b}$, fiet

$$dy = \frac{nz^{n-1}dz}{bz^\lambda} = \frac{n}{b} z^{n-\lambda-1} dz,$$

cuius integrale dat

$$y = \frac{n}{b(n-\lambda)} (a+bx)^{\frac{n-\lambda}{n}} + C,$$ ſiue

$$y = \frac{n}{b(n-\lambda)} \frac{a+bx}{\sqrt[n]{(a+bx)^\lambda}}.$$

Ex

Ex his autem exemplis iam apparet, integrationem non impediri, etiamſi exponentes n et λ non fuerint numeri integri.

Problema 4.

§. 13. *Si fuerit* X *functio rationalis binarum quantitatum* x *et* s, *exiſtente* $s = \sqrt{(a + b\sqrt{(f + gx)})}$, *quae formula ergo duplicem irrationalitatem inuoluit, formulam differentialem* X d x *ab hac duplici irrationalitate liberare.*

Solutio.

Ponatur iterum $\sqrt{(a+b\sqrt{(f+gx)})} = z$, vt ſit $s = z$, erit ſumtis quadratis $a + b\sqrt{(f + gx)} = zz$, hinc $b\sqrt{(f + gx)} = zz - a$: ac ſumtis denuo quadratis

$$bb(f + gx) = (zz - a)^2, \text{ vnde colligitur}$$

$$x = \frac{(zz - a)^2}{bbg} - \frac{f}{g}, \text{ hincque}$$

$$dx = \frac{4zdz(zz - a)}{bbg}.$$

Quibus valoribus ſubſtitutis tota formula reddetur rationalis.

Corollarium.

§. 14. Perſpicuum eſt, eodem modo irrationalitatem tolli poſſe, ſi fuerit multo generalius

$$s = \sqrt[n]{(a + b\sqrt[m]{(f + gx)})}.$$

Poſita enim hac formula $= z$, fiet

$$a + b\sqrt[m]{(f + gx)} = z^n \text{ et } b\sqrt[m]{(f + gx)} = z^n - a.$$

Porro $b^m(f + gx) = (z^n - a)^m$, et hinc colligitur

$x =$

$$x = \frac{(z^n - a)^m}{b^m g} - \frac{f}{g}, \text{ ideoque}$$

$$dx = \frac{mnz^{n-1}dz(z^n - a)^{m-1}}{b^m g}.$$

Sicque etiam hoc modo tota formula rationalis euadet.

Problema 5.

§. 15. *Si fuerit* X *functio rationalis binarum quantitatum* s *et* x, *exiſtente* $s = \sqrt{\frac{a+bx}{f+gx}}$, *formulam differentialem* X d x *ab irrationalitate liberare.*

Solutio.

Ponatur $\sqrt{\frac{a+bx}{f+gx}} = z$, et ſumtis quadratis erit $\frac{a+bx}{f+gx} = zz$, hincque $x = \frac{fzz-a}{b-gzz}$, vnde differentiando colligitur

$$dx = \frac{2bfzdz - 2agzdz}{(b-gzz)^2}.$$

Hisque valoribus ſubſtitutis formula propoſita Xdx ad rationalitatem erit perducta.

Exemplum 1.

§. 16. Si fuerit $dy = \frac{dx}{s} = \frac{dx\sqrt{(f+gx)}}{\sqrt{(a+bx)}}$, poſito $\sqrt{\frac{a+bx}{f+gx}} = z$ erit $dy = \frac{dx}{z}$, et ſubſtituto loco dx valore ſupra inuento colligitur

$$dy = \frac{2(bf-ag)dz}{(b-gzz)^2};$$

quae formula, vti iam ſatis conſtat, reduci poteſt ad talem: $\int \frac{dz}{b-gzz}$, cuius autem integratio vel per logarithmos vel per arcus circulares expedietur.

Exemplum 2.

§. 17. Sit ſpecialius $dy = \frac{dx\sqrt{(1-x)}}{\sqrt{(1+x)}}$, vbi $f = 1$, $g = -1$, $a = 1$ et $b = 1$, ideoque

$$z = \frac{\sqrt{(1+x)}}{\sqrt{(1-x)}} \text{ et } dx = \frac{4zdz}{(1+zz)^2};$$

quibus valoribus ſubſtitutis fiet $dy = \frac{4dz}{(1+zz)^2}$. Statuatur ergo:

$$\int \frac{4dz}{(1+zz)^2} = \frac{Az}{1+zz} + B\int \frac{dz}{1+zz} = y,$$

vnde ſumtis differentialibus fiet:

$$\frac{4}{(1+zz)^2} = \frac{A-Azz}{(1+zz)^2} + \frac{B}{1+zz} = \frac{A+B+(B-A)zz}{(1+zz)^2}.$$

Oportet igitur eſſe $A+B=4$ et $B-A=0$, ideoque $A=2$ et $B=2$; et quia $\int \frac{dz}{1+zz} = \text{A tang. } z$, adipiſcimur $y = \frac{2z}{1+zz} + 2 \text{ A tang. } z$; quocirca facta reſtitutione, ob $1+zz = \frac{2}{1-x}$ obtinebitur

$$y = \sqrt{(1-xx)} + 2 \text{ A tang. } \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Cum igitur huius arcus tangens ſit $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, erit eius ſinus $= \sqrt{\frac{1+x}{2}}$ et coſinus $= \sqrt{\frac{1-x}{2}}$; anguli vero dupli ſinus erit $\sqrt{(1-xx)}$ et coſinus $= -x$, vnde fiet

$$2 \text{ A tang. } \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \text{A coſ.} -x = \frac{\pi}{2} + \text{A ſin. } x;$$

quocirca integrale quaeſitum erit

$$y = \sqrt{(1-xx)} + \frac{\pi}{2} + \text{A ſin. } x + C,$$

quod ſi ita capi debeat, vt euaneſcat poſito $x = 0$, erit

$$C = -1 - \frac{\pi}{2}, \text{ ideoque } y = \sqrt{(1-xx)} - 1 + \text{A ſin. } x.$$

Tum igitur, ſi ſumatur $x = 1$, fiet $y = \frac{\pi}{2} - 1$, qui valor in fractionibus decimalibus dat 0,5707963.

Pro-

Problema 6.

§. 18. *Si fuerit X functio rationalis binarum variabilium x et s, exiſtente* $s = \sqrt[n]{\frac{a+bx}{f+gx}}$, *formulam differentialem* X d x *ad rationalitatem perducere.*

Solutio.

Poſito $s = \sqrt[n]{\frac{a+bx}{f+gx}} = z$, erit $\frac{a+bx}{f+gx} = z^n$, hincque $x = \frac{fz^n - a}{b - gz^n}$, conſequenter $dx = \frac{n(bf-ag)z^{n-1}dz}{(b-gz)^{2n}}$; hisque valoribus ſubſtitutis tota formula propoſita X dx ad rationalitatem erit perducta.

Problema 7.

§. 19. *Si fuerit X functio binarum quantitatum x et s, exiſtente* $s = \sqrt{(a+bxx)}$, *formulam differentialem* $\frac{X\,dx}{x}$ *ab irrationalitate liberare.*

Solutio.

Ponamus $s = \sqrt{(a+bxx)} = z$, erit $a + bxx = zz$, hinc $xx = \frac{zz-a}{b}$, et quia in functione X tantum quadratum xx, eiusque ergo poteſtates pares occurrunt: hac ſubſtitutione iam functio X euadet rationalis. Sumtis vero logarithmis $2lx = l(zz-a) - lb$, differentiando fit

$$\frac{2dx}{x} = \frac{2zdz}{zz-a}, \text{ ideoque } \frac{dx}{x} = \frac{zdz}{zz-a}.$$

Hoc ergo modo formula propoſita X. $\frac{dx}{x}$ prorſus reddetur rationalis.

Exemplum 1.

§. 20. Si fuerit

$$dy = \frac{x\,dx}{\sqrt{(a+bxx)}}, \text{ erit } dy = \frac{dx}{x} \cdot \frac{xx}{\sqrt{(a+bxx)}} = \frac{xx}{s} \cdot \frac{dx}{x}.$$

Poſito ergo $\sqrt{(a+bxx)} = z$ erit $dy = \frac{dz}{b}$, vnde colligitur integrando $y = \frac{z}{b} = \frac{\sqrt{(a+bxx)}}{b}$.

Exemplum 2.

§. 21. Si fuerit

$$dy = \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(a+bxx)}} = \frac{dx}{x} \cdot \frac{x^4}{s},$$

ponendo $\sqrt{(a+bxx)} = z$, vt ſit

$$xx = \frac{zz-a}{b} \text{ et } \frac{dx}{x} = \frac{z\,dz}{zz-a},$$

erit $dy = \frac{1}{bb} dz\,(zz-a)$, hincque integrando adipiſcimur $y = \frac{z}{3bb}(zz-3a)$; vnde facta reſtitutione prodibit integrale quaeſitum $y = \frac{bxx-2a}{3bb}\sqrt{(a+bxx)} + C$.

Exemplum 3.

§. 22. Si fuerit

$$dy = \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(a+bxx)^3}}, \text{ erit } dy = \frac{dx}{x} \cdot \frac{x^4}{s^3};$$

hinc poſito

$$\sqrt{(a+bxx)} = s = z \text{ fiet } dy = \frac{dz}{bb}\left(\frac{zz-a}{zz}\right),$$

vnde ſumto integrali fiet $y = \frac{1}{bb}\left(\frac{zz+a}{z}\right)$, quocirca facta reſtitutione reſultat $y = \frac{2a+bxx}{bb\sqrt{(a+bxx)}} + C$.

Problema 8.

§. 23. *Si fuerit X functio rationalis binarum quantitatum* x^n *et* s, *exiſtente* $s = \sqrt[m]{(a+bx^n)}$, *formulam differentialem* $X\frac{dx}{x}$ *ad rationalitatem perducere.*

Solu-

Solutio.

Poſito $s = \sqrt[m]{(a + b x^n)} = z$, fiet $a + b x^n = z^m$ et $x^n = \frac{z^m - a}{b}$. Quia igitur in functione X tantum poteſtas x^n occurrit, ea rationalis reddetur, ſi hi valores ſubſtituantur. Tum vero ſumtis logarithmis habebitur

$$n\, l\, x = l\,(z^m - a) - l\, b,$$

et differentiando

$$\frac{d x}{x} = \frac{m z^{m-1} d z}{n\,(z^m - a)},$$

ſicque tota formula propoſita fiet rationalis.

Exemplum.

§. 24. Sit

$$d y = \frac{x^{n-1} d x}{\sqrt[m]{(a + b x^n)}} = \frac{d x}{x} \cdot \frac{x^n}{s},$$

factaque ſubſtitutione orietur haec aequatio:

$$d y = \frac{m z^{m-2} d z}{b n},$$

qua integrata prodibit

$$y = \frac{m z^{m-1}}{n b\,(m-1)} = \frac{m}{n b\,(m-1)} \sqrt[m]{(a + b x^n)^{m-1}} + C, \text{ ſiue}$$

$$y = \frac{m}{n b\,(m-1)} \cdot \frac{a + b x^n}{\sqrt[m]{(a + b x^n)}} + C.$$

Problema.

§. 25. *Si ſuerit* X *functio rationalis quantitatum* xx *et* s, *exiſtente* $s = \sqrt{\frac{a+bxx}{f+gxx}}$, *formulam differentialem* $X\frac{dx}{x}$ *ab irrationalitate liberare.*

Solutio.

Ponatur $s = \sqrt{\frac{a+bxx}{f+gxx}} = z$, eritque $\frac{a+bxx}{f+gxx} = zz$, hinc $xx = \frac{fzz-a}{b-gzz}$, vnde functio X penitus fit rationalis. Porro ſumtis logarithmis

$$2lx = l(fzz-a) - l(b-gzz)$$

differentietur, vt prodeat

$$\frac{2dx}{x} = \frac{2fzdz}{fzz-a} + \frac{2gzdz}{b-gzz} = \frac{2(bf-ag)zdz}{(fzz-a)(b-gzz)},$$

vnde fit

$$\frac{dx}{x} = \frac{(bf-ag)zdz}{(fzz-a)(b-gzz)};$$

ſicque tota formula differentialis fiet rationalis.

Exemplum.

§. 26. Si ſuerit $dy = \frac{dx}{\sqrt{(f+gxx)}}$, repraeſentemus hanc formulam ita:

$$dy = \frac{dx}{x}\frac{x}{\sqrt{(f+gxx)}} = \frac{dx}{x}\sqrt{\frac{xx}{f+gxx}}.$$

Hic ergo erit $a = 0$, $b = 1$, et

$$z = \frac{x}{\sqrt{f+gxx}}, \text{ ita vt } dy = \frac{zdx}{x};$$

erit autem

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z(1-gzz)}, \text{ vnde fit } dy = \frac{dz}{1-gzz},$$

cuius formulae integratio per logarithmos expedietur, ſi ſuerit g numerus poſitiuus: ſin autem ſuerit negatiuus per arcus

arcus circulares abſoluetur. Sit igitur 1°) $g = + b b$, erit

$$dy = \frac{dz}{1 - b b z z}, \text{ ideoque}$$

$$y = \frac{1}{2b} l \frac{1 + b z}{1 - b z};$$

et reſtitutis valoribus ſupra indicatis erit

$$y = \frac{1}{2b} l \left(\frac{\sqrt{(f + b b x x)} + b x}{\sqrt{(f + b b x x)} - b x}\right) = \frac{1}{b} l \frac{\sqrt{(f + b b x x)} + b x}{\sqrt{f}}.$$

Sit 2°) g quantitas negatiua, puta $g = - b b$, erit

$$dy = \frac{dz}{1 + b b z z} = \frac{1}{b} \frac{b\, dz}{1 + b b z z},$$

vnde colligitur

$$y = \frac{1}{b} \text{ A tang. } b z = \frac{1}{b} \text{ A tang. } \frac{b x}{\sqrt{(f - b b x x)}}.$$

Vbi manifeſtum eſt, f eſſe debere quantitatem poſitiuam, quia alioquin formula differentialis eſſet imaginaria.

Corollarium.

§. 27. Hinc ergo ſi proponatur formula

$$dy = \sqrt{(1 + x x)}, \text{ ubi } f = 1 \text{ et } g = 1,$$

ex caſu priore ob $b = + 1$ erit

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1 + x x)}} = l (\sqrt{(1 + x x)} + x).$$

At ſi fuerit

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{(1 - x x)}}, \text{ ubi } f = 1 \text{ et } g = - 1,$$

colligitur ex caſu poſteriore $y = \text{A tang. } \frac{x}{\sqrt{(1 - x x)}}$, vnde concluditur

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1 - x x)}} = \text{A ſin. } x = \text{A coſ. } \sqrt{(1 - x x)}.$$

Problema 10.

§. 28. *Si fuerit* X *functio rationalis quantitatum*

x^n

x^n *et* s, *exiſtente* $s = \sqrt[n]{\left(\frac{a+bx^n}{f+gx^n}\right)}$, *formulam differentialem* $X\frac{dx}{x}$ *rationalem efficere.*

Solutio.

Ponatur $s = \sqrt[n]{\left(\frac{a+bx^n}{f+gx^n}\right)} = z$, eritque

$$\frac{a+bx^n}{f+gx^n} = z^n, \text{ hinc } x^n = \frac{fz^n - a}{b - gz^n},$$

tum autem ſumtis logarithmis erit

$$n\,l\,x = l\,(fz^n - a) - l\,(b - gz^n)$$

et differentiando

$$\frac{dx}{x} = \frac{fz^{n-1}\,dz}{fz^n - a} + \frac{gz^{n-1}\,dz}{b - gz^n} = \frac{(bf - ag)\,z^{n-1}\,dz}{(fz^n - a)(b - gz^n)},$$

quibus valoribus ſubſtitutis formula propoſita fit rationalis.

Problema II.

§. 29. *Si fuerit* X *functio rationalis binarum quantitatum* x^n *et* s, *exiſtente* $s = \sqrt[m]{\left(\frac{a+bx^n}{f+gx^n}\right)}$, *formulam differentialem* $X\frac{dx}{x}$ *ab omni irrationalitate liberare.*

Solutio.

Statuatur $s = \sqrt[m]{\frac{a+bx^n}{f+gx^n}} = z$, eritque

$$\frac{a+bx^n}{f+gx^n} = z^m, \text{ vnde fit } x^n = \frac{fz^m - a}{b - gz^m};$$

hinc

hinc ſumtis logarithmis erit

$$n\,l\,x = l(f z^m - a) - l(b - g z^m),$$

hinc differentiando

$$\frac{n\,d\,x}{x} = \frac{m(b f - a g) z^{m-1} d z}{(f z^m - a)(b - g z^m)}, \text{ ideoque}$$

$$\frac{d\,x}{x} = \frac{m(b f - a g) z^{m-1} d z}{n(f z^m - a)(b - g z^m)},$$

quibus valoribus ſubſtitutis irrationalitas formulae propoſitae penitus tollitur.

Problema 12.

§. 30. *Si fuerit* X *functio rationalis quaecunque binarum quantitatum* x *et* s, *exiſtente* $s = \sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x x)}$, *formulam differentialem* X d x *ad rationalitatem perducere.*

Solutio.

Hic duos caſus a ſe inuicem diſtingui conuenit, prout γ fuerit vel quantitas poſitiua vel negatiua.

I. Sit γ quantitas poſitiua, ac ponatur $\gamma = c c$ et $\beta = 2 b c$, vt habeatur

$$s = \sqrt{(\alpha + 2 b c x + c c x x)} = \sqrt{(\alpha - b b + (b + c x)^2)},$$

vbi loco $\alpha - b b$ breuitatis ergo ſcribatur e, vt ſit

$$s = \sqrt{(e + (b + c x)^2)}.$$

Iam ſtatuatur $s = b + c x + z$, eritque

$$s s = e + (b + c x)^2 = (b + c x)^2 + 2(b + c x) z + z z,$$

 vnde

vnde ſequitur

$$e - zz = 2z(b + cx), \text{ ſiue } b + cx = \frac{e - zz}{2z};$$

hincque colligitur

$$x = \frac{e - zz}{2cz} - \frac{b}{c}, \text{ ſeu } x = \frac{e - 2bz - zz}{2cz}.$$

Aequatio autem $b + cx = \frac{e - zz}{2z}$ differentiata praebet

$$c\,dx = -\frac{e\,dz}{2zz} - \frac{dz}{2} = -\frac{e\,dz - zz\,dz}{2zz},$$

vnde deducitur

$$dx = -\frac{dz(e + zz)}{2czz}, \text{ at ob}$$

$$b + cx = \frac{e - zz}{2z} \text{ fiet } s = \frac{e + zz}{2z}.$$

His ergo valoribus ſubſtitutis formula noſtra $X\,dx$ reddetur rationalis. Poſtquam igitur eius integrale fuerit inventum loco z valor ante inuentus $\sqrt{(e + (b + cx)^2)} - b - cx$ erit ſubſtituendus.

II. Sin autem γ fuerit quantitas negatiua, ponatur $\gamma = -cc$ et $\beta = -2bc$, vt habeatur

$$s = \sqrt{(\alpha - 2bc.x - ccxx)} = \sqrt{(\alpha + bb - (b + cx)^2)},$$

vbi euidens eſt, quantitatem $\alpha + bb$ neceſſario eſſe debere poſitiuam, quia alioquin s euaderet imaginarium. Quamobrem ponamus breuitatis gratia $\alpha + bb = aa$, vt fiat $s = \sqrt{(aa - (b + cx)^2)}$, ad quam formam rationalem efficiendam ſtatuamus

$$\sqrt{(aa - (b + cx)^2)} = a - (b + cx)z,$$

vnde ſumtis quadratis erit

$$aa - (b + cx)^2 = aa - 2az(b + cx) + (b + cx)^2 zz$$

quae aequatio reducitur ad hanc:

$$-(b + cx) = -2az + (b + cx)zz,$$

vnde reperitur

$b +$

$$b + c x = \frac{2 a z}{1 + z z}, \text{ ideoque}$$

$$x = \frac{2 a z - b - b z z}{c (1 + z z)}.$$

Illa autem aequatio differentiata dat

$$c d x = \frac{2 a d z (1 + z z) - 4 a z z d z}{(1 + z z)^2} = \frac{2 a d z (1 - z z)}{(1 + z z)^2};$$

vnde fit

$$d x = \frac{2 a d z (1 - z z)}{c (1 + z z)^2}.$$

Porro autem, cum ſit

$$s = a - (b + c x) z, \text{ ob } b + c x = \frac{2 a z}{1 + z z}$$

erit $s = \frac{a (1 - z z)}{1 + z z}$, quocirca, ſi loco x, s et $d x$ inuenti hi valores ſubſtituantur, formula propoſita differentialis $X d x$ euadet rationalis, et per variabilem z exprimetur, cuius integrale poſtquam fuerit inuentum, loco z vbique eius reſtituatur valor aſſumtus

$$z = a - \sqrt{(a a - (b + c x)^2)},$$

et integrale obtinebitur per ſolam variabilem x expreſſum.

Exemplum I.

§. 31. Si fuerit

$$d y = \frac{d x}{\sqrt{(e + (b + c x)^2)}},$$

quae formula ad caſum priorem pertinet, erit

$$d y = \frac{d x}{s} = - \frac{d z}{c z}, \text{ ob } d x = - \frac{d z (e + z z)}{2 e z z} \text{ et } s = \frac{e + z z}{2 z},$$

cuius integrale eſt $y = - \frac{1}{c} l z$; reſtituto ergo valore

$$z = \sqrt{(e + (b + c x)^2)} - b - c x, \text{ erit}$$

$$y = - \frac{1}{c} l (\sqrt{(e + (b + c x)^2)} - b - c x) + C,$$

quod integrale ſi euaneſcere debeat poſito $x = 0$, fiet

$$C = \frac{1}{c} l (\sqrt{(e + b b)} - b).$$

 Corol-

Corollarium.

§. 32. Si ponatur $b = 0$ et $c = 1$, ſiue
$dy = \frac{dx}{\sqrt{(e + xx)}}$, erit integrale
$$y = -l(\sqrt{(e + xx)} - x) + l\sqrt{e} = l\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{(e + xx)} - x}$$
quae formula reducitur ad hanc:
$$y = l\frac{\sqrt{(e + xx)} + x}{\sqrt{e}}.$$
Cum vero porro ſit
$$d.\sqrt{(e + xx)} = \frac{xdx}{\sqrt{(e + xx)}} \text{ erit}$$
$$\int\frac{xdx}{\sqrt{(e + xx)}} = \sqrt{(e + xx)}.$$
Si igitur hae duae formulae combinentur, habebitur iſta integratio notatu digna:
$$\int\frac{\text{A}dx + \text{B}xdx}{\sqrt{(e + xx)}} = \text{A}\,l\frac{\sqrt{(e + xx)} + x}{\sqrt{e}} + \text{B}\sqrt{(e + xx)}.$$

Exemplum II.

§. 33. Sit $dy = \frac{dx}{\sqrt{(aa - (b + cx)^2)}}$, quae formula ad caſum ſecundum eſt referenda, ita vt ſit $dy = \frac{dx}{s}$. Cum igitur ſit
$$dx = \frac{2ad z(1 - zz)}{c(1 + zz)^2} \text{ et } s = \frac{a(1 - zz)}{1 + zz}, \text{ erit}$$
$$y = \frac{dx}{s} = \frac{2}{c}\cdot\frac{dz}{1 + zz},$$
vnde fit integrando $y = \frac{2}{c}$ A tang. z.
Quia igitur eſt
$$z = \frac{a - \sqrt{(aa - (b + cx)^2)}}{b + cx}, \text{ erit}$$
$$y = \frac{2}{c}\text{ A tang. }\frac{a - \sqrt{(aa - (b + cx)^2)}}{b + cx} + \text{C}.$$

Corollarium.

§. 34. Sit igitur iterum $b = 0$ et $c = 1$, ſeu formu-

formula differentialis propoſita $dy = \frac{dx}{\sqrt{(aa-xx)}}$, reperieturque

$$y = 2 \text{ A tang.} \frac{a-\sqrt{(aa-xx)}}{x} + C.$$

Quia igitur tangens huius arcus eſt $\frac{a-\sqrt{(aa-xx)}}{x}$, tangens dupli arcus erit $\frac{x}{\sqrt{(aa-xx)}}$, ita ut ſit

$$y = \text{A tang.} \frac{x}{\sqrt{(aa-xx)}}:$$

huius autem arcus ſinus erit $\frac{x}{a}$; ſicque integrale quaeſitum

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(aa-xx)}} = \text{A ſin.} \frac{x}{a}.$$

Quia porro

$$d.\sqrt{(aa-xx)} = -\frac{x\,dx}{\sqrt{(aa-xx)}}, \text{ erit}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(aa-xx)}} = -\sqrt{(aa-xx)},$$

quocirca iſta generalior conficitur integratio:

$$\int \frac{\text{A}\,dx + \text{B}\,x\,dx}{\sqrt{(aa-xx)}} = \text{A tang.} \frac{x}{a} - \text{B}\sqrt{(aa-xx)}.$$

Problema 13.

§. 35. *Si fuerit* V *functio rationalis binarum quantitatum* v^n *et* s, *exiſtente* $s = \sqrt{(\alpha + \beta v^n + \gamma v^{2n})}$, *formulam differentialem* $V v^{n-1} dv$ *ab irrationalitate liberare.*

Solutio.

Ponatur $v^n = x$, erit

$$s = \sqrt{(\alpha + \beta x + xx)} \text{ et } v^{n-1} dv = \frac{dx}{n};$$

hic ergo iam erit V functio rationalis binarum quantitatum x et s, exiſtente

$$s = \sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma xx)}$$

 et

et formula ab irrationalitate liberanda erit $\frac{v\,dx}{u}$; qui caſus prorſus conuenit cum problemate praecedente, ideoque eandem habebit ſolutionem.

Scholion.

§. 36. Praecepta hactenus tradita ad omnes fere formulas differentiales, quae quidem adhuc tractari potuerunt, extenduntur. Interim tamen eiusmodi caſus occurrere poſſunt, quibus idonea ſubſtitutio, ad irrationalitatem tollendam neceſſaria, non tam facile perſpicitur: ſed acri iudicio demum inueſtigare licet, in quo negotio cum praecepta generalia tradere nondum liceat, exempla quaedam particularia ſpeciminis loco in medium afferamus.

Exemplum 1.

§. 37. *Si propoſita fuerit haec formula irrationalis*: $dP = \frac{dx(1+xx)}{(1-xx)\sqrt{(1+x^4)}}$, *eius integrale* P *inueſtigare.*

Si quis hic eiusmodi vti vellet ſubſtitutione, qua formula $\sqrt{(1+x^4)}$ ad rationalitatem perduceretur, oleum et operam eſſet perditurus, interim tamen ſingulari artificio ſequens ſubſtitutio negotium conficere poterit. Statuatur $\frac{x\sqrt{2}}{1-xx} = p$, eritque $1+pp = \frac{1+x^4}{(1-xx)^2}$, hinc

$$\sqrt{1+pp} = \frac{\sqrt{1+x^4}}{1-xx};$$

tum vero erit differentiando

$$dp = \frac{dx\sqrt{2}\,(1+xx)}{(1-xx)^2},$$

ex quibus valoribus colligitur

$$\frac{dp}{\sqrt{1+pp}} = \frac{dx\sqrt{2}\,(1+xx)}{(1-xx)\sqrt{(1+x^4)}},$$

quae

quae feliciter cum formula ipſa propoſita conuenit, ita vt ſit

$$\frac{dp}{\sqrt{(1+pp)}} = dP\sqrt{2}, \text{ ſiue } dP = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{dp}{\sqrt{1+pp}},$$

vnde colligitur integrando

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\, l\,(\sqrt{(1+pp)}+p).$$

Quare ſi loco p et $\sqrt{(1+pp)}$ valores dati ſubſtituantur, haec obtinetur integratio ſatis memorabilis:

$$P = \int \frac{dx\,(1+xx)}{(1-xx)\sqrt{(1+x^4)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, l\, \frac{\sqrt{(1+x^4)}+\sqrt{2}}{1+xx}.$$

Exemplum 2.

§. 38. *Si propoſita fuerit haec formula irrationalis:* $\frac{dx\,(1-xx)}{(1+xx)\sqrt{(1+x^4)}}$, *eius integrale Q inueſtigare.*

Ad hoc praeſtandum fiat $\frac{x\sqrt{2}}{1+xx} = q$, eritque

$$\sqrt{(1-qq)} = \frac{\sqrt{(1+x^4)}}{1+xx};$$

tum vero erit $dq = \frac{dx\,(1-xx)\sqrt{2}}{(1+xx)^2}$, atque hinc colligitur

$$\frac{dq}{\sqrt{(1-qq)}} = \frac{dx\,(1-xx)\sqrt{2}}{(1+xx)\sqrt{(1+x^4)}} = dQ\sqrt{2},$$

vnde fit

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dq}{\sqrt{(1-qq)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, A\,\text{ſin.}\, q.$$

Reſtituto ergo pro q valore aſſumto iſta obtinebitur integratio:

$$Q = \int \frac{dx\,(1-xx)}{(1+xx)\sqrt{(1+x^4)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, A\,\text{ſin.}\, \frac{x\sqrt{2}}{1+xx}.$$

Scholion.

§. 39. Cum iſtae duae formulae:

$$\frac{dx\,(1+xx)\sqrt{2}}{(1-xx)\sqrt{(1+x^4)}} \text{ et } \frac{dx\,(1-xx)\sqrt{2}}{(1+xx)\sqrt{(1+x^4)}},$$

per-

perductae ſint ad has ſimplices:

$$\frac{dp}{\sqrt{(1+pp)}} \text{ et } \frac{dq}{\sqrt{(1-qq)}},$$

quarum vtraque facile ab irrationalitate liberatur, iſtae ipſae formulae propoſitae ope idoneae ſubſtitutionis ab irrationalitate liberari poſſunt; vnde mirum non eſt, earum integralia ſiue per logarithmum ſiue per arcum circularem exhiberi potuiſſe. Satis enim iam eſt oſtenſum: omnium formularum differentialium rationalium integralia ſemper vel per logarithmos et arcus circulares, vel adeo algebraice exhiberi poſſe; quod igitur etiam de illis formulis irrationalibus eſt tenendum, quas certae ſubſtitutionis ope ad rationalitatem perducere licet. Vnde viciſſim plures Geometrae concluſerunt: ſi quae formula differentialis nullo plane modo ab irrationalitate liberari queat, tum eius integrale etiam neque per logarithmos nec arcus circulares, multo minus algebraice exprimi poſſe, ſed ad aliud genus quantitatum tranſcendentium referri oportere. Ceterum combinatio duorum praecedentium exemplorum manuducit ab ſolutionem ſequentium.

Exemplum 3.

§. 40. *Si propoſita fuerit haec formula differentialis*: $dy = \frac{dx\sqrt{(1+x^4)}}{1-x^4}$, *eius integrale inuenire.*

Hanc formulam per neutram ſubſtitutionem ante vſurpatam rationalem reddere licet: vtraque tamen iuncta negotium confici poterit; namque eius integrale per logarithmos et arcus circulares ſequenti artificio expedietur: Formula enim propoſita in binas ſequentes partes diſcerpi poteſt, quae ſunt

dy

$$dy = \frac{\frac{1}{2} dx(1+xx)}{(1-xx)\sqrt{(1+x^4)}} + \frac{\frac{1}{2} dx}{(1+xx)\sqrt{(1+x^4)}},$$

quippe quarum ſumma ipſam formulam noſtram propoſitam producit; prodit enim

$$dy = \frac{\frac{1}{2} dx(1+xx)^2 + \frac{1}{2} dx(1-xx)^2}{(1-x^4)\sqrt{(1+x^4)}}$$
$$= \frac{dx(1+x^4)}{(1-x^4)\sqrt{(1+x^4)}} = \frac{dx\sqrt{(1+x^4)}}{1-x^4}.$$

Quod ſi ergo duo praecedentia exempla in ſubſidium vocentur, manifeſto fiet $dy = \frac{1}{2} dP + \frac{1}{2} dQ$, conſequenter integrale quaeſitum erit $y = \frac{1}{2} P + \frac{1}{2} Q$, quod ſequenti modo exprimere licebit:

$$\int \frac{dx\sqrt{(1+x^4)}}{1-x^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}} l \frac{\sqrt{(1+x^4)}+x\sqrt{2}}{1-xx} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{A ſin.} \frac{x\sqrt{2}}{1+xx}.$$

Exemplum. 4.

§. 41. *Si propoſita fuerit haec formula differentialis:* $dy = \frac{xxdx}{(1-x^4)\sqrt{(1+x^4)}}$, *eius integrale inueſtigare.*

Haec formula ſimili modo ac praecedens tractari poteſt; diſcerpatur enim in ſequentes duas partes:

$$\frac{\frac{1}{4} dx(1+xx)}{(1-xx)\sqrt{(1+x^4)}} - \frac{\frac{1}{4} dx(1-xx)}{(1+xx)(\sqrt{1+x^4})},$$

quippe quae coniunctae producunt

$$dy = \frac{\frac{1}{4} dx(1+xx)^2 - \frac{1}{4} dx(1-xx)^2}{(1-x^4)\sqrt{(1+x^4)}}$$
$$= \frac{\frac{1}{4} dx. 4xx}{(1-x^4)\sqrt{(1+x^4)}} = \frac{xxdx}{(1-x^4)\sqrt{(1+x^4)}},$$

quae cum ſit ipſa formula propoſita, erit ex praecedentibus exemplis $dy = \frac{1}{4} dP - \frac{1}{4} dQ$, conſequenter $y = \frac{1}{4} P - \frac{1}{4} Q$, hinc integrale quaeſitum ita reperietur expreſſum:

$$\int \frac{xx\,dx}{(1-x^4)\sqrt{(1+x^4)}} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\, l\, \frac{\sqrt{(1+x^4)} + x\sqrt{2}}{1-xx} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\, \text{A ſin.}\, \frac{x\sqrt{2}}{1+xx}.$$

Scholion.

§. 42. Haec duo poſtrema exempla ſi nullo plane modo ope cuiuspiam ſubſtitutionis ad rationalitatem perduci poſſent, inſigne praeberent documentum, quod concluſio ſupra memorata quandoque fallere poſſit: Re autem attentius perpenſa inueni, omnia haec quatuor exempla ope vnica ſubſtitutione immediate ad rationalitatem perduci ideoque integrari poſſe; id quod oſtendiſſe vtique operae erit pretium.

Alia reſolutio quatuor poſtremorum exemplorum.

§. 43. Statuatur pro primo exemplo

$$v = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{(1+x^4)}}, \text{ eritque } \sqrt{(1+vv)} = \frac{1+xx}{\sqrt{(1+x^4)}};$$

tum vero $\sqrt{(1-vv)} = \frac{1-xx}{\sqrt{(1+x^4)}}$, vnde fit

$$\sqrt{\frac{1+vv}{1-vv}} = \frac{1+xx}{1-xx} \text{ et } \sqrt{(1-v)^4} = \frac{1-x^4}{1+x^4}.$$

At differentiando adipiſcimur

$$dv = \frac{dx(1-x^4)\sqrt{2}}{(1+x^4)\sqrt{(1+x^4)}}.$$

Cum nunc ſit $\frac{1-x^4}{1+x^4} = \sqrt{(1-v^4)}$, erit

$$dv = \frac{dx\sqrt{2}\sqrt{(1-v^4)}}{\sqrt{(1+x^4)}}, \text{ ſiue } \frac{dv}{\sqrt{(1-v^4)}} = \frac{dx\sqrt{2}}{\sqrt{(1+x^4)}};$$

quae aequalitas maxime eſt notatu digna. Quod ſi iam haec

haec aequatio multiplicetur per $\sqrt{\frac{1+vv}{1-vv}} = \frac{1+xx}{1-xx}$, naſcetur haec aequatio:

$$\frac{dv}{1-vv} = \frac{dx(1+xx)\sqrt{2}}{(1-xx)(1+x^4)},$$

ſicque erit

$$\int \frac{dx(1+xx)}{(1-xx)\sqrt{(1+x^4)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dv}{1-vv} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\, l\, \frac{1+v}{1-v}.$$

Deinde aequatio

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{dv}{\sqrt{(1-v^4)}} = \frac{dx}{\sqrt{(1+x^4)}}$$

multiplicetur per

$$\sqrt{\frac{1-vv}{1+vv}} = \frac{1-xx}{1+xx},$$

ac prodibit formula exempli ſecundi

$$\int \frac{dx(1-xx)}{(1+xx)\sqrt{(1+x^4)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dv}{1+vv} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ A tang. } v.$$

Porro eadem aequatio

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{dv}{\sqrt{(1-v^4)}} = \frac{dx}{\sqrt{(1+x^4)}}$$

diuidatur per

$$\sqrt{(1-v^4)} = \frac{1-x^4}{1+x^4} \text{ et prodibit}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{dv}{1-v^4} = \frac{dx\sqrt{(1+x^4)}}{1-x^4};$$

quae eſt ipſa formula exempli tertii, ita vt iam ſit

$$\int \frac{dx\sqrt{(1+x^4)}}{1-x^4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dv}{1-v^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{dv}{1+vv} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{dv}{1-vv},$$

quod integrale cum ante inuento egregie conuenit. Tandem poſtrema aequatio hic inuenta:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{dv}{1-v^4} = \frac{dx\sqrt{(1+x^4)}}{1-x^4}$$

ducatur in $vv = \frac{2xx}{1+x^4}$, vt prodeat

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{vvdv}{1-v^4} = \frac{2xxdx\sqrt{(1+x^4)}}{(1-x^4)(1+x^4)} = \frac{2xxdx}{(1-x^4)\sqrt{(1+x^4)}},$$

vnde pro exemplo quarto colligitur

$$\int \frac{xxdx}{(1-x^4)\sqrt{(1+x^4)}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{vvdv}{1-v^4} = -\frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{dv}{1+vv} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{dv}{1-vv},$$

 vnde

vnde cum ſit $v = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{(1+x^4)}}$, erit

$$\int \frac{dv}{1-vv} = \tfrac{1}{2}\, l \frac{1+v}{1-v} = \tfrac{1}{2}\, l \frac{\sqrt{(1+x^4)}+x\sqrt{2}}{\sqrt{(1+x^4)}-x\sqrt{2}}$$
$$= \tfrac{1}{2}\, l \frac{(\sqrt{(1+x^4)}+x\sqrt{2})^2}{(1-xx)^2} = l \frac{\sqrt{(1+x^4)}+x\sqrt{2}}{1-xx}.$$

Deinde vero eſt

$$\int \frac{dv}{1+vv} = \text{A tang. } v = \text{A ſin. } \frac{v}{\sqrt{(1+vv)}} = \text{A ſin. } \frac{x\sqrt{2}}{1+xx}.$$

Scholion.

§. 44. Quanquam autem haec quatuor exempla ad rationalitatem reducere licuit: tamen concluſio ſupra memorata, quod omnes formulae integrales, quae nullo modo rationales effici queant, ad aliud pertineant tranſcendentium genus, neque per ſolos logarithmos et arcus circulares expediri poſſint, non ſolum manet ſuſpecta, ſed etiam falſitas eius euidenter ob oculos poni poteſt. Sit enim functio

$$X = \frac{a}{\sqrt{(1+xx)}} + \frac{b}{\sqrt[3]{(1+x^3)}} + \frac{c}{\sqrt[4]{(1+x^4)}};$$

tum certe formula differentialis $X\,dx$ nullo modo ad rationalitatem perduci poterit; interim tamen ſingulos eius partes

$$\frac{a\,dx}{\sqrt{(1+xx)}},\quad \frac{b\,dx}{\sqrt[3]{(1+x^3)}} \text{ et } \frac{c\,dx}{\sqrt[4]{(1+x^4)}}$$

ſeorſim rationales effici et integralia per logarithmos et arcus circulares exhiberi poſſunt. Coronidis loco hic ſequens problema notatu dignum adiungamus.

Pro-

Problema.

§. 45. *Formularum integralium* $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^4)}}$ *et* $\int \frac{dv}{\sqrt{(\;\;+v^4)}}$ *valores per ſeries inueſtigare, pro caſibus, quibus ponitur tam* $v = 1$ *quam* $x = 1$.

Solutio.

Cum poſito $v = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{(1+x^4)}}$, vt ſupra fecimus, euidens ſit, ſumto $x = 0$ fore etiam $v = 0$, et ſumto $x = 1$ fore $v = 1$, ita vt hae duae quantitates x et v ſimul euaneſcant et ſimul vnitati aequentur: hinc deducimus iſtam aequationem differentialem attentione digniſſimam:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{dv}{\sqrt{(1-v^4)}} = \frac{dx}{\sqrt{(1+x^4)}},$$

quas ergo ambas formulas in ſeries conuerti oportet; erit autem

$$\frac{1}{\sqrt{(1-v^4)}} = (1-v^4)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}v^4 + \frac{1.3}{2.4}v^8 + \frac{1.3.5}{2.4.6}v^{12} + \text{etc. et}$$

$$\frac{1}{\sqrt{(1+x^4)}} = (1+x^4)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1.3}{2.4}x^8 - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^{12} + \text{etc.}$$

Illa iam per dv multiplicata et integrata praebet

$$\int \frac{dv}{\sqrt{(1-v^4)}} = v + \frac{1}{2.5}v^5 + \frac{1.3}{2.4.9}v^9 + \frac{1.3.5}{2.4.6.13}v^{13} + \text{etc.}$$

vnde poſito $v = 1$ valor huius integralis erit

$$1 + \frac{1}{2.5} + \frac{1.3}{2.4.9} + \frac{1.3.5}{2.4.6.13} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.17} + \text{etc.}$$

quam ſeriem littera A indicemus. Simili modo altera ſeries in dx ducta et integrata producit

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^4)}} = x - \frac{1}{2.5}x^5 + \frac{1.3}{2.4.9}x^9 - \frac{1.3.5}{2.4.6.13}x^{13} + \text{etc.}$$

cuius valor facto $x = 1$ erit

$$1 - \frac{1}{2.5} + \frac{1.3}{2.4.9} - \frac{1.3.5}{2.4.6.13} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.17} - \text{etc.}$$

quem littera B deſignemus, ita vt ſit $B = \frac{A}{\sqrt{2}}$, ſiue $A = B\sqrt{2}$; vnde patet, priorem ſeriem ſe habere ad poſteriorem vt $\sqrt{2} : 1$.

Scholion.

§. 46. Valor formulae integralis $\int \frac{dv}{\sqrt{(1-v^4)}}$ etiam hoc modo per ſeriem inueſtigari poteſt. Cum ſit

$$\frac{1}{\sqrt{(1-v^4)}} = \frac{(1+vv)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{(1-vv)}} \text{ et}$$

$$(1+vv)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \tfrac{1}{2}vv + \tfrac{1.3}{2.4}v^4 - \tfrac{1.3.5}{2.4.6}v^6 + \text{etc.}$$

notetur eſſe $\int \frac{dv}{\sqrt{(1-vv)}} = \frac{\pi}{2}$. Deinde pro integratione reliquorum terminorum ponatur

$$\int \frac{v^{n+2}\,dv}{\sqrt{(1-vv)}} = A\,v^{n+1}\sqrt{(1-vv)} + B\int \frac{v^n\,dv}{\sqrt{(1-vv)}},$$

quae aequatio differentiata dat

$$\frac{v^{n+2}}{\sqrt{(1-vv)}} = (n+1)\,A\,v^n\sqrt{1-vv} - \frac{A\,v^{n+2}}{\sqrt{(1-vv)}} + \frac{B\,v^n}{\sqrt{(1-vv)}},$$

vnde per $\sqrt{(1-vv)}$ multiplicando prodit

$$v^{n+2} = (n+1)\,A\,v^n - (n+1)\,A\,v^{n+2} - A\,v^{n+2} + B\,v^n.$$

Hinc termini in quibus ineſt v^{n+2} inter ſe aequati praebent $1 = -(n+2)\,A$, ideoque $A = -\frac{1}{n+2}$; termini vero v^n continentes praebent $0 = (n+1)\,A + B$, vnde fit $B = \frac{n+1}{n+2}$, ita vt in genere ſit

$$\int \frac{v^{n+2}\,dv}{\sqrt{(1-vv)}} = -\frac{1}{n+2}v^{n+1}\sqrt{(1-vv)} + \frac{n+1}{n+2}\int \frac{v^n\,dv}{\sqrt{(1-vv)}},$$

quod

quod integrale vti requiritur euaneſcit poſito $v = 0$. Ponatur nunc $v = 1$, eritque:

$$\int \frac{v^{n+2}\,dv}{\sqrt{(1 - vv)}} = \frac{n+1}{n+2} \int \frac{v^n\,dv}{\sqrt{(1 - vv)}};$$

hinc ergo pro n ſcribendo ſucceſſiue valores 0, 2, 4, 6, 8, etc. erit

$$\text{I. } \int \frac{vv\,dv}{\sqrt{(1 - vv)}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2};$$

$$\text{II. } \int \frac{v^4\,dv}{\sqrt{(1 - vv)}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2};$$

$$\text{III. } \int \frac{v^6\,dv}{\sqrt{(1 - vv)}} = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2};$$

etc. etc.

quibus valoribus adhibitis erit caſu $v = 1$

$$\int \frac{dv}{\sqrt{(1 - v^4)}} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2^2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \cdot \frac{\pi}{2} + \text{etc.}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \text{etc.}\right)$$

ita vt ſit ex problemate praecedente

$$1 - \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 9} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 13} - \text{etc.}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \text{etc.}\right)$$

vnde ſit

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1 - \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 9} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 13} + \text{etc.}}{1 - \frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \text{etc.}}$$

NOVA

NOVA METHODVS
FRACTIONES QVASCVNQVE RATIONALES
IN FRACTIONES SIMPLICES
RESOLVENDI.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Sit $\frac{P}{Q}$ fractio quaecunque propoſita, cuius tam numerator P quam denominator Q ſint functiones rationales integrae quantitatis variabilis z, denominator autem Q ſit productum ex quotcunque factoribus ſimplicibus formae $z \pm a$, ſiue aequalibus ſiue inaequalibus inter ſe: et notum eſt, iſtam fractionem ſemper reſolui poſſe in fractiones ſimplices, quarum denominatores ſinguli formentur ex factoribus ipſius Q, numeratores vero ſint quantitates conſtantes, ſiquidem variabilis z in numeratore P ad pauciores dimenſiones aſſurgat quam in denominatore Q, quoniam aliter praeter iſtas fractiones ſimplices inſuper partes integrae eſſent adiiciendae. Qui caſus cum nulla laboret difficultate, propterea quod partes iſtae integrae facile reperiuntur, dum numerator P per denominatorem Q actu diuiditur, ſufficiet eiusmodi tantum fractiones conſideraſſe, in quarum denominatore Q variabilis z ad altiores poteſtates aſcendit quam in numeratore P. Tum igitur,

igitur, quando pro ſingulis factoribus denominatoris Q inventae fuerint fractiones ſimplices ipſis reſpondentes, ſumma omnium harum fractionum aequabitur fractioni propoſitae $\frac{P}{Q}$. Primus quidem in Introductione mea ad Analyſin infinitorum methodum tradidi ſatis ſimplicem, cuius ope omnes iſtae fractiones partiales pro ſingulis denominatoris factoribus reperiri queant, ſine vllo reſpectu ad reliquas habito, quarum ratio antehac teneri debebat. Poſtmodum vero iſtam methodum magis excolui, et quemadmodum ope calculi differentialis facilius ad quosuis vſus accommodari poſſit, vberius oſtendi. Nunc autem penitus noua Idea ſeſe mihi obtulit eandem reſolutionem perficiendi, quae plerumque negotium non mediocriter ſubleuare videtur. Imprimis autem ad functiones tranſcendentes mira facilitate accommodari poteſt, vnde operae pretium fore exiſtimo, ſi iſtam nouam methodum adcuratius expoſuero.

§. 2. Sit igitur $z-a$ factor ſimplex denominatoris Q, ſiue ſolitarius, ſiue quotcunque ſibi aequales admittens. Ac priori caſu inde fractio ſimplex oriunda erit $\frac{\alpha}{z-a}$. Sin autem denominator binos huiusmodi factores aequales inuoluat, ſcilicet $(z-a)^2$, tum reſolutio binas dabit fractiones ſimplices $\frac{\alpha}{(z-a)^2}+\frac{\beta}{z-a}$; at ſi factorem habeat cubicum $(z-a)^3$, fractiones ſimplices inde ortae erunt $\frac{\alpha}{(z-a)^3}+\frac{\beta}{(z-a)^2}+\frac{\gamma}{z-a}$, et ita porro pro altioribus poteſtatibus. Totum igitur negotium huc redit, vt pro ſingulis huiusmodi factoribus numeratores α, β, γ, etc. definiantur, pro qua inueſtigatione iam olim praecepta

 dedi.

dedi. Noua autem methodus, quam hic ſum traditurus, huic innititur principio, quod poſito $z = a$ omnes iſtae fractiones partiales euadant infinitae, dum reliquae omnes manent finitae magnitudinis, ideoque prae illis quaſi euaneſcant. Hinc ſi in fractione propoſita $\frac{P}{Q}$ ſtatuatur $z = a$, ea vtique etiam in infinitum excreſcet, eiusque valor debite euolutus praebebit ipſas illas fractiones ſimplices in infinitum abeuntes, id quod hic accuratius ſum perſecuturus.

§. 3. Ne igitur hic conſideratio infiniti moram faceſſat, ſtatuamus non $z - a = 0$, ſed $z - a = \omega$, denotante ω quantitatem infinite paruam atque adeo ipſam euaneſcentem, ac ponamus tam in numeratore P quam in denominatore Q vbique $z = a + \omega$, quo facto numerator P euoluatur in huiusmodi formam:

$$P = A + B\omega + C\omega\omega + D\omega^3 + \text{etc.}$$

denominator vero Q, quia per hypotheſin euaneſcit poſito $z = a$, talem induet formam:

$$Q = \mathfrak{A}\omega + \mathfrak{B}\omega\omega + \mathfrak{C}\omega^3 + \mathfrak{D}\omega^4 + \text{etc.}$$

vbi ſi factor $z - a$ fuerit ſolitarius, primus terminus $\mathfrak{A}\omega$ neceſſario aderit. Sin autem denominator Q factorem habeat $(z - a)^2$, erit $\mathfrak{A} = 0$, ac denominator a termino $\mathfrak{B}\omega^2$ incipiet. Quodſi vero denominatoris factor fuerit $(z - a)^3$, primus terminus in denominatore erit $\mathfrak{C}\omega^3$, et ita porro, ita vt ſi in genere factor fuerit $(z - a)^n$, infima poteſtas in denominatore ſit $\mathfrak{N}\omega^n$.

§. 4. Haec quidem ſubſtitutio, ponendo $z = a + \omega$, operationes tantum vulgares algebraicas poſtulat: interim tamen

tamen per nota principia differentialium mirifice ſubleuari poteſt. Nam ſi in genere loco z ſcribatur $z + \omega$, functio ipſius z quaecunque P accipiet iſtum valorem:

$$P + \frac{\omega\, dP}{1 \cdot dz} + \frac{\omega\omega\, ddP}{1 \cdot 2\, dz^2} + \frac{\omega^3\, d^3P}{1 \cdot 2 \cdot 3\, dz^3} + \frac{\omega^4\, d^4P}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4\, dz^4} + \text{etc.}$$

Hoc igitur modo ſtatim forma tam numeratoris P quam denominatoris Q ſecundum poteſtates ipſius ω diſpoſita reperietur, tantumque opus eſt, vt in ſingulis terminis loco z vbique ſcribatur a. Quousque autem iſtas expreſſiones per poteſtates ipſius ω continuari oporteat, ex primo denominatoris termino, ſeu infima poteſtate ipſius ω facile diiudicabitur, vnde ſequentes caſus euoluamus.

Caſus I.

Quo denominatoris Q factor eſt $z - a$.

§. 5. Hoc igitur caſu non erit $\mathfrak{A} = 0$, vnde fractio noſtra $\frac{P}{Q}$, facto $z = a + \omega$, induet hanc formam

$$\frac{1}{\omega} \cdot \frac{A + B\omega + C\omega^2 + D\omega^3 + etc.}{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\omega + \mathfrak{C}\omega^2 + \mathfrak{D}\omega^3 + etc.}$$

vbi fractio iſta per diuiſionem euoluatur tantum vsque ad primam poteſtatem ω, propterea quod in fractione praefixa $\frac{1}{\omega}$ haec littera vnicam tantum habet dimenſionem, vnde hoc caſu tam numeratorem P quam denominatorem Q ad duos tantum terminos extendiſſe ſufficit, ita vt ſit $\frac{1}{\omega} \cdot \frac{A + B\omega}{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\omega}$. Nunc igitur ex euolutione iſtius fractionis $\frac{A + B\omega}{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\omega}$, oriatur quotus $\alpha + \beta\omega$, eritque

$$\alpha = \frac{A}{\mathfrak{A}};\ \beta = \frac{B}{\mathfrak{A}} - \frac{A\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}^2}.$$

His autem valoribus inuentis fractio noſtra diſcerpitur in has partes: $\frac{\alpha}{\omega} + \alpha$, quarum cum prima tantum fiat infini-

 ta,

ta, ſi loco ω reſtituamus valorem $z-a$, fractio ſimplex hinc reſultans erit $\frac{\alpha}{z-a}$. Hoc igitur modo facillime fractiones ſimplices ex ſingulis denominatoris Q factoribus ſolitariis formae $z-a$ obtinentur; neque adeo opus eſt, valorem ipſius β noſſe, vnde ſufficere potuiſſet tantum primos terminos A et $\mathfrak{A}$ indagaſſe. Oritur autem A ex numeratore P, poſito $z=a$; at $\mathfrak{A}$ oritur ex formula $\frac{dQ}{dz}$, poſito itidem $z=a$. Cum enim poſito $z=a$ fiat $Q=0$, ſi loco z ſcribatur $a+\omega$, prodibit $\mathfrak{A}=\frac{dQ}{dz}$.

§. 6. Interim tamen bonum eſt, etiam valorem ipſius β noſſe, quoniam inde quaeſtio non parum curioſa facile poteſt reſolui. Cum enim ex factore $z-a$ deducta ſit fractio $\frac{\alpha}{z-a}$, ſi pro reliquis omnibus terminis ſcribamus litteram R, erit vtique $\frac{P}{Q}=\frac{\alpha}{z-a}+R$. Quod ſi ergo deſideretur ſumma omnium reliquorum terminorum R, caſu quo ponitur $z=a$, ſiue $z=a+\omega$, quippe quae ſumma eſt finita, ex aequatione modo inuenta fiet $R=\frac{P}{Q}-\frac{\alpha}{z-a}$, ideoque poſito $z=a+\omega$, erit

$$R=\frac{\alpha}{\omega}+\beta-\frac{\alpha}{\omega}=\beta;$$

ſicque valor litterae β, quem inuenimus, exprimit ſummam omnium reliquorum terminorum pro caſu $z=a$. Erat autem $\beta=\frac{B}{\mathfrak{A}}-\frac{A\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}^2}$.

§. 7. Facile autem patet, hoc modo pro omnibus factoribus ſimplicibus denominatoris Q easdem prodire fractiones partiales, ad quas methodus antehac expoſita deducit. Si enim ponamus $\frac{P}{Q}=\frac{\alpha}{z-a}+R$, ac per $z-a$ multiplicemus, fiet

P (z

$\frac{P(z-a)}{Q} = \alpha + R(z-a)$.

Quia nunc nouimus, numeratorem quaeſitum α eſſe conſtantem, pro eo ſemper idem valor prodire debet, quicquid pro z ſcribatur. Ponatur igitur $z = a$, vt ratio reliquorum terminorum R ex calculo egrediatur, fietque $\alpha = \frac{P(z-a)}{Q}$, poſito ſcilicet $z = a$; tum autem tam numerator quam denominator euaneſcit, vnde ſi eorum loco ſua differentialia ponantur, fiet

$$\alpha = \frac{(z-a)\,dP + P\,dz}{dQ}.$$

Poſito igitur $z = a$ erit $\alpha = \frac{P\,dz}{dQ}$. At vero ſupra aſſumſimus, caſu $z = a$ fieri $P = A$ et $\frac{dQ}{dz} = \mathfrak{A}$, ita vt et hinc etiam prodeat $\alpha = \frac{A}{\mathfrak{A}}$.

Caſus II.

Quo denominatoris Q factor eſt $(z-a)^2$.

§. 8. Hic igitur in forma, ad quam noſtram fractionem $\frac{P}{Q}$, poſito $z = a + \omega$, conuertimus, erit $\mathfrak{A} = 0$, vnde fractio pro hoc caſu ita referri poterit:

$$\frac{1}{\omega\omega} \cdot \frac{A + B\omega + C\omega\omega}{\mathfrak{B} + \mathfrak{C}\omega + \mathfrak{D}\omega\omega}.$$

Hic ſcilicet poteſtates ipſius ω non vltra ſecundam protendimus. Nunc illa expreſſio in hanc formam:

$$\frac{1}{\omega^2}(\alpha + \beta\omega + \gamma\omega\omega),$$

reducatur, et reperietur calculo ſubducto

$$\alpha = \frac{A}{\mathfrak{B}};\ \beta = \frac{B}{\mathfrak{B}} - \frac{A\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}^2};\ \gamma = \frac{C}{\mathfrak{B}} - \frac{B\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}^2} - \frac{A\mathfrak{D}}{\mathfrak{B}^2} + \frac{A\mathfrak{C}^2}{\mathfrak{B}^3}.$$

His igitur valoribus inuentis noſtra fractio diſcerpetur in has partes: $\frac{\alpha}{\omega^2} + \frac{\beta}{\omega} + \gamma$, quarum binae priores, ob $\omega = z - a$,

 prae-

praebent iſtas fractiones partiales: $\frac{\alpha}{(z-a)^2} + \frac{\beta}{z-a}$: at quantitas γ aequabitur ſummae omnium reliquorum terminorum, ſiquidem in illis ſtatuatur $z = a$.

Caſus III.

Quo denominatoris factor eſt $(z-a)^3$.

§. 9. Hic igitur ob $\mathfrak{A} = 0$ et $\mathfrak{B} = 0$ fractio evoluenda erit

$$\frac{1}{\omega^3} \cdot \frac{A + B\omega + C\omega\omega + D\omega^3}{\mathfrak{C} + \mathfrak{D}\omega + \mathfrak{E}\omega\omega + \mathfrak{F}\omega^3},$$

quae reducatur ad hanc formam:

$$\frac{1}{\omega^3}(\alpha + \beta\omega + \gamma\omega\omega + \delta\omega^3),$$

ope harum aequalitatum:

$$A = \alpha\mathfrak{C};\ B = \alpha\mathfrak{D} + \beta\mathfrak{C};\ C = \alpha\mathfrak{E} + \beta\mathfrak{D} + \gamma\mathfrak{C};$$
$$D = \alpha\mathfrak{F} + \beta\mathfrak{E} + \gamma\mathfrak{D} + \delta\mathfrak{C},$$

quibus valoribus inuentis ex denominatoris Q factore cubico $(z-a)^3$ obtinentur iſtae fractiones partiales:

$$\frac{\alpha}{(z-a)^3} + \frac{\beta}{(z-a)^2} + \frac{\gamma}{z-a}.$$

At vero δ exhibet ſummam omnium reliquorum terminorum, ſi in ipſis vbique ſcribatur $z = a$. Facile autem intelligitur, hoc modo etiam ad altiores poteſtates procedi poſſe.

§. 10. Haec methodus etiam ſuccedit, ſi factores denominatoris fuerint imaginarii, ſcilicet formae

$$z - a + b\sqrt{-1},$$

tum autem, quoniam etiam factor erit $z - a - b\sqrt{-1}$, binae fractiones partiales hinc ortae

$$\frac{\alpha}{z-a+b\surd-1}+\frac{\beta}{z-a-b\surd-1},$$

facile in factorem duplicatum realem contrahentur, cuius denominator erit $(z-a)^2+bb$. Hoc igitur ſequenti exemplo oſtendiſſe iuuabit.

Exemplum.

Si fractio propoſita reſoluenda fuerit $\frac{P}{Q}=\frac{ſin.\,\phi}{tang.\,\phi-coſ.\,\phi}$, *eam in fractiones ſimplices reſoluere.*

Solutio.

§. 11. Hic igitur primo omnes angulos ϕ quaeri oportet, quibus denominator tang. ϕ – coſ. ϕ euaneſcit. Ponatur igitur

$$tang.\,\phi-coſ.\,\phi=0,\ \text{ſiue}\ ſin.\,\phi-coſ.\,\phi^2=0,$$

ita vt ſit

$$ſin.\,\phi^2+ſin.\,\phi=1,\ \text{vnde colligitur}$$

$$ſin.\,\phi=-\frac{1\pm\surd5}{2},$$

ſicque pro ſin. ϕ duo habentur valores:

$$ſin.\,\phi=-\frac{1+\surd5}{2}\ \text{et}\ ſin.\,\phi=-\frac{1-\surd5}{2},$$

quorum prior cum ſit vnitate minor, dabit valorem realem pro angulo ϕ. Cum enim ſit proxime

$$\frac{\surd5-1}{2}=0,618034,\ \text{erit}\ \phi=38^\circ.\ 10'.\ 22'',$$

quem angulum breuitatis gratia ponamus $=\zeta$, ita vt ſit

$$ſin.\,\zeta=0,618034\ \text{et}\ coſ.\,\zeta=0,786151$$

atque tang. $\zeta=0,786154$, ideoque vti poſuimus

$$coſ.\,\zeta=tang.\,\zeta.$$

§. 12.

§. 12. Alter autem valor pro ſin. Φ inuentus dat ſin. $\Phi = -1,618034$, qui cum ſit vnitate maior, monſtrat hunc angulum eſſe imaginarium, ad quem definiendum notetur eſſe coſ. $\theta\sqrt{-1} = \frac{e^{-\theta} + e^{+\theta}}{2}$, qui valor cum manifeſto maior ſit vnitate, et quidem poſitiuus vtamur hac formula:

$$\text{coſ.}\,(\pi + \theta\sqrt{-1}) = \frac{-e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}.$$

Quodſi ergo faciamus

$$\Phi = 90° - \pi - \theta\sqrt{-1} = \theta\sqrt{-1} - \tfrac{\pi}{2}, \text{ erit}$$

$$\text{ſin.}\,\Phi = -\frac{e^{-\theta} - e^{+\theta}}{2},$$

quamobrem debet eſſe

$$\frac{e^{-\theta} + e^{\theta}}{2} = +1,618034 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

pro quo numero breuitatis gratia ſcribamus ε, vt ſit $e^{\theta} + e^{-\theta} = 2\varepsilon$, vnde colligitur

$$e^{\theta} = \varepsilon + \sqrt{(\varepsilon\varepsilon - 1)} = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} + \sqrt{\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}} = \varepsilon + \sqrt{\varepsilon},$$

et ſubſtituto valore fit $e^{\theta} = 2,0581710$. Hinc igitur fiet $\theta = l.\,2,0581710$, ſumendo ſcilicet logarithmum hyperbolicum, qui reperitur ſi logarithmus vulgaris multiplicetur per 2,3025851. Cum igitur logarithmus vulgaris ſit 0,3134816 erit

$$\theta = 0,3134816 \cdot 2,3025851 = 0,7218177.$$

§. 13. Inventis igitur his valoribus pro ζ et θ, ex priore $\Phi = \zeta$ omnes anguli Φ, quibus noſter denominator

nator tang. Φ — coſ. Φ euaneſcit, ſunt in genere

$$2 i \pi + \zeta \text{ et } (2 i + 1) \pi - \zeta,$$

quippe qui anguli omnes eundem habent ſinum; vnde colliguntur omnes factores ſimplices reales. Pro imaginariis autem tantum loco ζ ſcribi oportet $\theta \sqrt{-1} - \frac{1}{2}\pi$, ſicque ſimul obtinentur omnes factores imaginarii.

§. 14. Primo igitur denominatoris noſtri factor ſit $\Phi - 2 i \pi - \zeta$, ponaturque hic factor $= \omega$, ita vt ſit

$$\Phi = 2 i \pi + \zeta + \omega, \text{ eritque } \text{ſin.}\, \Phi = \text{ſin.}\, (\zeta + \omega)$$
$$= \text{ſin.}\, \zeta \text{ coſ.}\, \omega + \text{coſ.}\, \zeta \text{ ſin.}\, \omega = \text{ſin.}\, \zeta + \omega \text{ coſ.}\, \zeta,$$

quoniam non vltra primam dimenſionem ipſius ω progredi neceſſe eſt. Deinde vero erit

$$\text{coſ.}\, \Phi = \text{coſ.}\, (\zeta + \omega) = \text{coſ.}\, \zeta - \omega \text{ ſin.}\, \zeta,$$

denique

$$\text{tang.}\, \Phi = \text{tang.}\, (\zeta + \omega) = \text{tang.}\, \zeta + \frac{\omega}{\text{coſ.}\, \zeta^2}.$$

Hinc igitur denominator erit

$$\text{tang.}\, \zeta - \text{coſ.}\, \zeta + \omega (\text{ſin.}\, \zeta + \frac{1}{\text{coſ.}\, \zeta^2});$$

at vero per hypotheſin eſt tang. ζ — coſ. $\zeta = 0$, vnde denominator iſte erit $\omega (\text{ſin.}\, \zeta + \frac{1}{\text{coſ.}\, \zeta^2})$. Vbi notetur, ſi accuratius procedere voluiſſemus, in denominatorem inſuper terminum ω^2 ingreſſurum fuiſſe, quem autem hic negligere licet, quia nullus factor bis occurrit. Hinc ergo naſcitur valor infinitus noſtrae fractionis

$$\frac{\text{ſin.}\, \zeta}{\omega (\text{ſin.}\, \zeta + \frac{1}{\text{coſ.}\, \zeta^2})} = \frac{\text{ſin.}\, \zeta \text{ coſ.}\, \zeta^2}{\omega (\text{ſin.}\, \zeta \text{ coſ.}\, \zeta^2 + 1)}$$

ex quo haec fractio partialis deducitur:

$$\frac{\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\zeta^2}{\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\zeta^2+1}\cdot\frac{1}{\Phi-2i\pi-\zeta},$$

quare ſi pro i omnes numeros tam poſitiuos quam negatiuos ſtatuamus, prodibit iſta ſeries fractionum:

$$\frac{\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\zeta^2}{1+\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\zeta^2}\left(\frac{1}{\Phi-\zeta}+\frac{1}{\Phi-2\pi-\zeta}+\frac{1}{\Phi+2\pi-\zeta}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\Phi-4\pi-\zeta}+\frac{1}{\Phi+4\pi-\zeta}+\text{etc.}\right)$$

At ſi pro ζ ſcribamus $\theta\sqrt{-1}-\frac{1}{2}\pi$, ſeries fractionum imaginariarum erit

$$\frac{\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\zeta^2}{1+\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\zeta^2}\left(\frac{1}{\Phi+\frac{1}{2}\pi-\theta\sqrt{-1}}+\frac{1}{\Phi-\frac{3}{2}\pi\Phi-\theta\sqrt{-1}}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\Phi+\frac{5}{2}\pi-\theta\sqrt{-1}}+\frac{1}{\Phi-\frac{7}{2}\pi-\theta\sqrt{-1}}\right).$$

§. 15. Pro altero caſu, quo in genere erat factor

$\Phi-(2i+1)\pi+\zeta=\omega$, erit

$\Phi=(2i+1)\pi-\zeta+\omega$

hincque

$$\text{ſin.}\,\Phi=\text{ſin.}\,(\zeta-\omega)=\text{ſin.}\,\zeta-\omega\,\text{coſ.}\,\zeta,$$

tum vero

$$\text{coſ.}\,\Phi=-\text{coſ.}\,(\zeta-\omega)=-\text{coſ.}\,\zeta-\omega\,\text{ſin.}\,\zeta \text{ et}$$
$$\text{tang.}\,\Phi=-\text{tang.}\,(\zeta-\omega)=-\text{tang.}\,\zeta+\frac{\omega}{\text{coſ.}\,\zeta^2},$$

quare totus denominator erit

$$-\text{tang.}\,\zeta+\text{coſ.}\,\zeta+\omega\left(\frac{1}{\text{coſ.}\,\zeta^2}+\text{ſin.}\,\zeta\right)$$
$$=\omega\left(\text{ſin.}\,\zeta+\frac{1}{\text{coſ.}\,\zeta^2}\right) \text{ ob } -\text{tang.}\,\zeta+\text{coſ.}\,\zeta=0,$$

vnde pars infinita noſtrae fractionis erit

$$\frac{\text{ſin.}\,\zeta}{\omega\left(\text{ſin.}\,\zeta+\frac{1}{\text{coſ.}\,\zeta^2}\right)}=\frac{\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\zeta^2}{\omega\,(1+\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\zeta^2)}.$$

Nunc

Nunc igitur, ſi loco ω ſcribamus valorem aſſumtum

$$\Phi - (2i + 1)\pi + \zeta,$$

orietur forma generalis fractionum ſimplicium

$$\frac{\sin.\zeta \cos.\zeta^2}{(1 + \sin.\zeta \cos.\zeta^2)} \cdot \frac{1}{\Phi - (2i + 1)\pi + \zeta}.$$

Loco i ergo ſucceſſiue ſcribamus omnes valores

$$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4 \text{ etc.}$$

et colligetur ſequens ſeries fractionum:

$$\frac{\sin.\zeta \cos.\zeta^2}{1 + \sin.\zeta \cos.\zeta^2} \left(\frac{1}{\Phi - \pi + \zeta} + \frac{1}{\Phi + \pi + \zeta} + \frac{1}{\Phi - 3\pi + \zeta}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{\Phi + 3\pi + \zeta} + \frac{1}{\Phi - 5\pi + \zeta} + \text{etc.}\right)$$

Quodſi iam hic pro ζ ſcribamus $\theta\sqrt{-1} - \frac{1}{2}\pi$, orientur fractiones imaginariae, quae erunt

$$\frac{\sin.\zeta \cos.\zeta^2}{1 + \sin.\zeta \cos.\zeta^2} \left(\frac{1}{\Phi + \frac{1}{2}\pi + \theta\sqrt{-1}} + \frac{1}{\Phi - \frac{3}{2}\pi + \theta\sqrt{-1}}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{\Phi + \frac{5}{2}\pi + \theta\sqrt{-1}} + \frac{1}{\Phi - \frac{7}{2}\pi + \theta\sqrt{-1}} + \text{etc.}\right)$$

§. 16. Colligamus nunc primo ſeorſim omnes fractiones reales, et cum omnes habeant eundem coefficientem conſtantem $\frac{\sin.\zeta \cos.\zeta^2}{1 + \sin.\zeta \cos.\zeta^2}$, ante omnia in eius valorem numericum inquiramus. Primo igitur cum fuiſſet

$$\sin.\zeta - \cos.\zeta^2 = 0, \text{ erit } \cos.\zeta^2 = \sin.\zeta,$$

ideoque iſte coefficiens $= \frac{\sin.\zeta^2}{1 + \sin.\zeta^2}$; porro vero erat

$$\sin.\zeta^2 + \sin.\zeta = 1, \text{ ideoque } \sin.\zeta^2 = 1 - \sin.\zeta$$

vnde fit coefficiens $\frac{1 - \sin.\zeta}{2 - \sin.\zeta}$. Denique vero pro factoribus realibus eruimus $\sin.\zeta = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, vnde noſter coefficiens evadet $\frac{3 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}} = \frac{5 - \sqrt{5}}{10}$, cuius ergo valor erit 0,2763932,

 pro

pro quo breuitatis gratia ſcribamus α, et omnes fractiones ſimplices reales in ordinem redactae erunt

$$\frac{\alpha}{\Phi-\zeta}+\frac{\alpha}{\Phi-\zeta-2\pi}+\frac{\alpha}{\Phi-\zeta+2\pi}+\frac{\alpha}{\Phi-\zeta-4\pi}+\frac{\alpha}{\Phi-\zeta+4\pi}+\text{etc.}$$

$$\frac{\alpha}{\Phi+\zeta-\pi}+\frac{\alpha}{\Phi+\zeta+\pi}+\frac{\alpha}{\Phi+\zeta-3\pi}+\frac{\alpha}{\Phi+\zeta+3\pi}+\frac{\alpha}{\Phi+\zeta-5\pi}+\text{etc.}$$

§. 17. Pro partibus autem imaginariis idem coefficiens communis

$\frac{\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\zeta^2}{1+\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\zeta^2}$, ob $\text{coſ.}\,\zeta^2=\text{ſin.}\,\zeta$ et $\text{ſin.}\,\zeta^2=1-\text{ſin}\,\zeta$, transmutatur vt ante in hanc formam: $\frac{1-\text{ſin.}\,\zeta}{2-\text{ſin.}\,\zeta}$. At vero pro partibus imaginariis inuenimus $\text{ſin.}\,\zeta=-\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, in quo iam inuoluitur ſubſtitutio ante memorata $\zeta=\theta\sqrt{-1}-\frac{1}{2}\pi$. Hoc ergo valore ſubſtituto coefficiens communis erit

$$\frac{3+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}=\frac{5+\sqrt{5}}{10},$$

ideoque in numeris 0,7236068, pro quo numero ſcribamus β, ita vt ſit $\alpha+\beta=1$, hanc ob rem bini ordines fractionum imaginariarum erunt

$$\frac{\beta}{\Phi-\theta\sqrt{-1}+\frac{1}{2}\pi}+\frac{\beta}{\Phi-\theta\sqrt{-1}-\frac{3}{2}\pi}+\frac{\beta}{\Phi-\theta\sqrt{-1}+\frac{5}{2}\pi}$$

$$+\frac{\beta}{\Phi-\theta\sqrt{-1}-\frac{7}{2}\pi}\ \text{etc.}$$

$$\frac{\beta}{\Phi+\theta\sqrt{-1}+\frac{1}{2}\pi}+\frac{\beta}{\Phi+\theta\sqrt{-1}-\frac{3}{2}\pi}+\frac{\beta}{\Phi+\theta\sqrt{-1}+\frac{5}{2}\pi}$$

$$+\frac{\beta}{\Phi+\theta\sqrt{-1}-\frac{7}{2}\pi}\ \text{etc.}$$

Hinc ergo ſi binae harum fractionum in vnam ſummam colligantur, imaginaria ſe mutuo deſtruent, ac prodibit ſequens ſeries:

β

$$\frac{\beta(2\Phi+\pi)}{(\Phi+\frac{1}{2}\pi)^2+\theta\theta}+\frac{\beta(2\Phi-3\pi)}{(\Phi-\frac{3}{2}\pi)^2+\theta\theta}$$

$$+\frac{\beta(2\Phi+5\pi)}{(\Phi+\frac{5}{2}\pi)^2+\theta\theta}+\frac{\beta(2\Phi-7\pi)}{(\Phi-\frac{7}{2}\pi)^2+\theta\theta}, \text{ etc.}$$

vbi notetur eſſe $\theta\theta = 0,5210210$.

§. 18. Quoniam partes imaginariae commode ſe contrahi ſunt paſſae, vt ſimilis contractio in partibus realibus ſuccedat ſtatuamus $\zeta = \frac{1}{2}\pi + \eta$ et ambae ſeries ita ſe habebunt:

$$\frac{\alpha}{\Phi-\frac{1}{2}\pi-\eta}+\frac{\alpha}{\Phi-\frac{5}{2}\pi-\eta}+\frac{\alpha}{\Phi+\frac{3}{2}\pi-\eta}$$

$$+\frac{\alpha}{\Phi-\frac{5}{2}\pi-\eta}+\frac{\alpha}{\Phi+\frac{7}{2}\pi-\eta}+\text{ etc.}$$

$$\frac{\alpha}{\Phi-\frac{1}{2}\pi+\eta}+\frac{\alpha}{\Phi+\frac{3}{2}\pi+\eta}+\frac{\alpha}{\Phi-\frac{5}{2}\pi+\eta}$$

$$+\frac{\alpha}{\Phi+\frac{7}{2}\pi+\eta}+\frac{\alpha}{\Phi-\frac{9}{2}\pi+\eta}+\text{ etc.}$$

Hic ergo cuilibet termino conuenit quaſi ſocius, binisque contractis orietur ſequens ſeries:

$$\frac{\alpha(2\Phi-\pi)}{(\Phi-\frac{1}{2}\pi)^2-\eta\eta}+\frac{\alpha(2\Phi+3\pi)}{(\Phi+\frac{3}{2}\pi)^2-\eta\eta}$$

$$+\frac{\alpha(2\Phi-5\pi)}{(\Phi-\frac{5}{2}\pi)^2-\eta\eta}+\frac{\alpha(2\Phi+7\pi)}{(\Phi+\frac{7}{2}\pi)^2-\eta\eta}+\text{ etc.}$$

vbi notetur, cum ſit $\eta = \zeta - \frac{1}{2}\pi$, quoniam in partibus radii eſt $\zeta = 0,6662405$ fore $\eta = -0.9045558$, ideoque $\eta\eta = 0,0182214$, cum ante fuiſſet $\theta\theta = 0,5210210$.

§. 19. Quae igitur hactenus ſunt allata huc redeunt, vt fractio propoſita $\frac{\text{ſin.}\,\Phi}{\text{tang.}\,\Phi - \text{coſ.}\,\Phi}$, aequetur binis ſequentibus ſeriebus iunctim ſumtis:

$$\frac{\alpha(2\Phi - \pi)}{(\Phi - \frac{1}{2}\pi)^2 - \eta\eta} + \frac{\alpha(2\Phi + 3\pi)}{(\Phi + \frac{3}{2}\pi)^2 - \eta\eta}$$

$$+ \frac{\alpha(2\Phi - 5\pi)}{(\Phi - \frac{5}{2}\pi)^2 - \eta\eta} + \frac{\alpha(2\Phi + 7\pi)}{(\Phi + \frac{7}{2}\pi)^2 - \eta\eta} + \text{etc.}$$

$$\frac{\beta(2\Phi + \pi)}{(\Phi + \frac{1}{2}\pi)^2 + \theta\theta} + \frac{\beta(2\Phi - 3\pi)}{(\Phi - \frac{3}{2}\pi)^2 + \theta\theta}$$

$$+ \frac{\beta(2\Phi + 5\pi)}{(\Phi + \frac{5}{2}\pi)^2 + \theta\theta} + \frac{\beta(2\Phi - 7\pi)}{(\Phi - \frac{7}{2}\pi)^2 + \theta\theta} + \text{etc.}$$

Hinc igitur ſequitur, ſi ſumatur $\Phi = 0$, quo caſu fractio ipſa in nihilum abit, fore

$$0 = \begin{cases} -\frac{4.1\alpha\pi}{\pi\pi - 4\eta\eta} + \frac{4.3.\alpha\pi}{9\pi\pi - 4\eta\eta} - \frac{4.5\alpha\pi}{25\pi\pi - 4\eta\eta} + \frac{4.7\alpha\pi}{49\pi\pi - 4\eta\eta} - \text{etc.} \\ +\frac{4.1\beta\pi}{\pi\pi + 4\theta\theta} - \frac{4.3.\beta\pi}{9\pi\pi + 4\theta\theta} + \frac{4.5\beta\pi}{25\pi\pi + 4\theta\theta} - \frac{4.7\beta\pi}{49\pi\pi + 4\theta\theta} + \text{etc.} \end{cases}$$

Ceterum hoc exemplum perquam idoneum eſt viſum, quo applicatio ad factores imaginarios illuſtraretur.

EVOLVTIO PRODVCTI INFINITI $(1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)$ IN SERIEM SIMPLICEM.

Auctore
L. EVLERO.

§. 1.

Poſito $s=(1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)$ etc. facile patet fore:

$$s=1-x-xx(1-x)-x^3(1-x)(1-xx)-x^4(1-x)(1-xx)(1-x^3)-\text{etc.}$$

quae ſeries cum iam ſit infinita, quaeritur, ſi ſinguli eius termini euoluantur, qualis ſeries ſecundum ſimplices poteſtates ipſius x ſit proditura. Cum igitur duo primi termini $1-x$ iam ſint euoluti, loco reliquorum omnium ſcribatur littera A, ita vt ſit $s=1-x-A$, ideoque

$$A=xx(1-x)+x^3(1-x)(1-xx)+x^4(1-x)(1-xx)(1-x^3)\text{ etc.}$$

§. 2. Quoniam hi termini omnes factorem habent communem $1-x$, eo euoluto ſinguli termini diſcerpentur in binas partes quas ita repraeſentemus:

$$A=xx+x^3(1-xx)+x^4(1-xx)(1-x^3)+x^5(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)$$
$$-x^3-x^4(1-xx)-x^5(1-xx)(1-x^3)-x^6(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)$$

Hinc

Hinc iam binae partes eadem poteſtate ipſius x affectae in vnam contrahantur, ac reſultabit pro A ſequens forma:

$$A = xx - x^5 - x^7(1-xx) - x^9(1-xx)(1-x^3)$$
$$- x^{11}(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4) - \text{etc.}$$

vbi duo termini primi $xx - x^5$ iam ſunt euoluti; ſequentes autem procedunt per has poteſtates: x^7, x^9, x^{11}, x^{13}, x^{15} quarum exponentes binario creſcunt.

§. 3. Ponamus nunc ſimili modo vt ante

$A = xx - x^5 - B$, ita vt ſit

$$B = + x^7(1-xx) + x^9(1-xx)(1-x^3)$$
$$+ x^{11}(1-xx)(1-x^3)(1-x^4) + \text{etc.}$$

cuius omnes termini habent factorem communem $1 - xx$, quo euoluto ſinguli termini in binas partes diſcerpantur, vti ſequitur:

$$B = x^7 + x^9(1-x^3) + x^{11}(1-x^3)(1-x^4) + x^{13}(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5) \text{ etc.}$$
$$- x^9 - x^{11}(1-x^3) - x^{13}(1-x^3)(1-x^4) - x^{15}(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5) \text{ etc.}$$

Hic iterum bini termini, qui eandem poteſtatem ipſius x habent praefixam, in vnam colligantur et prodibit:

$$B = x^7 - x^{12} - x^{15}(1-x^3) - x^{18}(1-x^3)(1-x^4)$$
$$- x^{21}(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5) - \text{etc.}$$

vbi iam poteſtates ipſius x creſcunt ternario.

§. 4. Statuatur nunc porro $B = x^7 - x^{12} - C$, ita vt ſit

$$C = x^{15}(1-x^3) + x^{18}(1-x^3)(1-x^4)$$
$$+ x^{21}(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5) + \text{etc.}$$

et iam ſinguli termini per euolutionem factoris $1 - x^3$ in binas partes reſoluantur, fietque:

C =

$$C = x^{15} + x^{18}(1-x^4) + x^{21}(1-x^4)(1-x^5) + x^{24}(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)$$
$$-x^{18} - x^{21}(1-x^4) - x^{24}(1-x^4)(1-x^5) - x^{27}(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6) \text{ etc.}$$

vbi denuo membra, quibus eadem poteſtas ipſius x praefixa, in vnum contracta praebebunt

$$C = x^{15} - x^{22} - x^{26}(1-x^4) - x^{30}(1-x^4)(1-x^5)$$
$$- x^{34}(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6) \text{ etc.}$$

vbi poteſtates praefixae quaternario creſcunt.

§. 5. Statuatur $C = x^{15} - x^{22} - D$, vt ſit

$$D = x^{26}(1-x^4) + x^{30}(1-x^4)(1-x^5)$$
$$+ x^{34}(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6) \text{ etc.}$$

qui termini per euolutionem factoris $1 - x^4$ in binos diſcerpantur hoc modo:

$$D = x^{26} + x^{30}(1-x^5) + x^{34}(1-x^5)(1-x^6) + x^{38}(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)$$
$$-x^{30} - x^{34}(1-x^5) - x^{38}(1-x^5)(1-x^6) - x^{42}(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7) \text{ etc.}$$

Nunc binis vt hactenus contrahendis colligitur

$$D = x^{26} - x^{35} - x^{40}(1-x^5) - x^{45}(1-x^5)(1-x^6)$$
$$- x^{50}(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7) \text{ etc.}$$

Hic igitur poteſtates ipſius x quinario creſcunt.

§. 6. Statuatur $D = x^{26} - x^{35} - E$, ita vt ſit

$$E = x^{40}(1-x^5) + x^{45}(1-x^5)(1-x^6)$$
$$+ x^{50}(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7) \text{ etc.}$$

ac reſolutione in binas partes vt hactenus inſtituta prodit

$$E = x^{40} + x^{45}(1-x^6) + x^{50}(1-x^6)(1-x^7) + x^{55}(1-x^6)(1-x^7)(1-x^8)$$
$$-x^{45} - x^{50}(1-x^6) - x^{55}(1-x^6)(1-x^7) - x^{60}(1-x^6)(1-x^7)(1-x^8) \text{ etc.}$$

Contractis vero binis terminis in vnum prodibit

$$E = x^{40} - x^{51} - x^{57}(1 - x^6) - x^{63}(1 - x^5)(1 - x^7)$$
$$- x^{69}(1 - x^6)(1 - x^7)(1 - x^8) \text{ etc.}$$

vbi poteſtates ipſius x ſenario creſcunt.

§. 7. Cum lex, qua iſtae operationes vlterius ſunt continuandae ſatis ſit perſpicua, ſi poſtremi valores pro ſingulis litteris A, B, C, D, inuenti ordine ſubſtituantur, pro ſerie quaeſita reperiemus ſequentem formam:

$$S = 1 - x, - xx + x^5, + x^7 - x^{12}, - x^{15} + x^{22},$$
$$+ x^{26} - x^{35}, - x^{40} + x^{51}, \text{ etc.}$$

Hic igitur tota quaeſtio huc reducitur, vt ordo definiatur, quo exponentes poteſtatum ipſius x continuo vlterius augentur, quandoquidem ex operationibus inſtitutis iam ſatis eſt manifeſtum ſigna terminorum + et − ita alternatim ſe excipere, vt ambo geminentur.

§. 8. Quo igitur in hanc legem inquiramus, videamus quomodo in ſingulis litteris iſti numeri ſint orti. Hunc in finem primos ſaltem cuiusque litterae terminos in eius forma prima exhibitos ordine diſponamus

$A = xx(1 - x)$	$7 = 3 + 4 = 3 + 1 + 3 = 3 + 1 + 1 + 2$
$B = x^7(1 - xx)$	$15 = 4 + 11 = 4 + 2 + 9 = 4 + 2 + 2 + 7$
$C = x^{15}(1 - x^3)$	$26 = 5 + 21 = 5 + 3 + 18 = 5 + 3 + 3 + 15$
$D = x^{26}(1 - x^4)$	$40 = 6 + 34 = 6 + 4 + 30 = 6 + 4 + 4 + 26$
$E = x^{40}(1 - x^5)$	$57 = 7 + 50 = 7 + 5 + 45 = 7 + 5 + 5 + 40$
etc.	etc.

Hic ſcilicet ex euolutione litterae A vidimus, numerum 7 oriri ex aggregato 3 + 4, tum vero 4 oriri ex 1 + 3, ac denique 3 ex 1 + 2, quae ergo reſolutio dabit

$$7 = 3 + 4 = 3 + 1 + 3 = 3 + 1 + 1 + 2.$$

At-

Atque idem ordo in ſequentibus litteris eſt obſervatus, vbi vltimi numeri procedunt ordine 2, 7, 15, 26, 40.

§. 9. Ex his iam manifeſtum eſt, numerorum 2, 7, 15, 26, 40, 57, etc. differentias progreſſionem arithmeticam conſtituere, vnde horum numerorum terminus generalis erit:

$$2 + 5(n-1) + \frac{3(n-1)(n-2)}{1.2} = \frac{3nn+n}{2}.$$

Exponentes autem, qui hos antecedunt, erant 1, 5, 12, 22, 35, 51 ab illis numeris 1, 2, 3, 4, 5, et in genere ipſo numero n, ita vt exponens, qui formulam $\frac{3nn+n}{2}$ praecedit, futurus ſit $\frac{3nn-n}{2}$.

§. 10. Nunc igitur ſeriem ſimplicem inuentam quae aequalis eſt producto infinito propoſito

$$(1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4) \text{ etc.}$$

perfecte cognoſcimus. Cum enim haec ſeries inuenta ſit:

$$s = 1 - x^1 - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26}$$
$$- x^{35} - x^{40} + x^{51} + \text{ etc.}$$

certi nunc ſumus, in ea alias poteſtates ipſius x non occurrere, niſi quarum exponentes contineantur in hac formula generali: $\frac{3nn \pm n}{2}$, et quidem ita, vt ſi n fuerit numerus impar, bini termini inde nati habituri ſint ſignum $-$, qui autem ex paribus oriuntur ſignum $+$.

Alia inueſtigatio eiusdem ſeriei.

§. 11. Eadem ſeries ſecundum poteſtates ipſius x procedens etiam ſequenti modo inueſtigari poteſt. Cum ſcilicet ſit

$$s = 1 - x - xx(1-x) - x^3(1-x)(1-xx)$$
$$- x^4(1-x)(1-x^2)(1-x^3) \text{ etc.}$$

euoluatur ſtatim ſecundum membrum $-xx(1-x)$, vt fiat

$$s = 1 - x - xx + x^3 - x^3(1-x)(1-xx)$$
$$- x^4(1-x)(1-xx)(1-x^3) \text{ etc.}$$

ac ſtatuatur $s = 1 - x - xx + A$ vt ſit

$$A = x^3 - x^3(1-x)(1-xx)$$
$$- x^4(1-x)(1-xx)(1-x^3) - \text{ etc.}$$

cuius ſingula membra per euolutionem factoris $1-x$ in duas partes diſcerpantur, vt prodeat

$$A = x^3 - x^3(1-xx) - x^4(1-xx)(1-x^3) - x^5(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)$$
$$+ x^4(1-xx) + x^5(1-xx)(1-x^3) + x^6(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)$$

Hic iterum bina membra eadem poteſtate ipſius x affecta contracta praebebunt:

$$A = +x^5 + x^7(1-xx) + x^9(1-xx)(1-x^3)$$
$$+ x^{11}(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4) \text{ etc.}$$

§. 12. Hic nunc iterum ſecundum membrum euoluatur, vt prodeat:

$$A = x^5 + x^7 - x^9 + x^9(1-xx)(1-x^3)$$
$$+ x^{11}(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4) \text{ etc.}$$

Iam ponatur $A = x^5 + x^7 - B$, vt ſit

$$B = x^9 - x^9(1-xx)(1-x^3) - x^{11}(1-xx)(1-x^3)(1-x^4) \text{ etc.}$$

quare ſi vbique factor $1-xx$ euoluatur, obtinebitur

$$B = x^9 - x^9(1-x^3) - x^{11}(1-x^3)(1-x^4) - x^{13}(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)$$
$$+ x^{11}(1-x^3) + x^{13}(1-x^3)(1-x^4) + x^{15}(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)$$

tum vero contrahendis binis membris orietur

$$B = x^{12} + x^{15}(1-x^3) + x^{18}(1-x^3)(1-x^4)$$
$$+ x^{21}(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5) \text{ etc.}$$

§. 13.

§. 13. Euoluatur pariter ſecundum membrum ac ſtatuatur $B = x^{12} + x^{15} - C$, eritque

$$C = x^{18} - x^{18}(1-x^3)(1-x^4) - x^{21}(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5) - \text{etc.}$$

Nunc termini euoluantur ſecundum factorem $1 - x^3$, fietque

$$C = x^{18} - x^{18}(1-x^4) - x^{21}(1-x^4)(1-x^5) - x^{24}(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)$$
$$+ x^{21}(1-x^4) + x^{24}(1-x^4)(1-x^5) + x^{27}(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)$$

Hinc binis membris contrahendis fiet

$$C = x^{22} + x^{26}(1-x^4) + x^{30}(1-x^4)(1-x^5)$$
$$+ x^{34}(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6) \text{ etc.}$$

§. 14. Euoluto nunc hic iterum ſecundo membro ſtatuatur $C = x^{22} + x^{26} - D$, eritque

$$D = x^{30} - x^{30}(1-x^4)(1-x^5) - x^{34}(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6) \text{ etc.}$$

vbi euolutio factoris $1 - x^4$ producet

$$D = x^{30} - x^{30}(1-x^5) - x^{34}(1-x^5)(1-x^6) - x^{38}(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)$$
$$+ x^{34}(1-x^5) + x^{38}(1-x^5)(1-x^6) + x^{42}(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7) \text{ etc.}$$

Hinc binis membris contractis fiet:

$$D = x^{35} + x^{40}(1-x^5) + x^{45}(1-x^5)(1-x^6)$$
$$+ x^{50}(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7) \text{ etc.}$$

§. 15. Euoluto ſecundo membro ſtatuatur denuo $D = x^{35} + x^{40} - E$, eritque

$$E = x^{45} - x^{45}(1-x^5)(1-x^6) - x^{50}(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7) \text{ etc.}$$

et euoluto factore ſecundo $1 - x^5$ fiet

$$E = x^{45} - x^{45}(1-x^6) - x^{50}(1-x^6)(1-x^7) - x^{55}(1-x^6)(1-x^7)(1-x^8)$$
$$+ x^{50}(1-x^6) + x^{55}(1-x^6)(1-x^7) + x^{60}(1-x^6)(1-x^7)(1-x^8) \text{ etc.}$$

 binis-

binisque terminis collectis elicitur

$$E = x^{51} + x^{57}(1 - x^6) + x^{63}(1 - x^6)(1 - x^7)$$
$$+ x^{69}(1 - x^5)(1 - x^7)(1 - x^8) \text{ etc.}$$

§. 16. Inuentis igitur his valoribus litterarum A, B, C, D, E, ſi ſinguli ſucceſſiue ſubſtituantur, reſultabit iſta ſeries:

$$1 - x - xx, + x^5 + x^7, - x^{12} - x^{15}, + x^{22} + x^{26}, - x^{35} - x^{40}, + \text{ etc.}$$

Hic autem ordo exponentium facilius perſpicitur. Cum enim in valoribus litterarum A, B, C, D, primo conſtitutis primi termini ſimplices eſſent x^3, x^9, x^{18}, x^{30}, x^{45}, exponentes manifeſto ſunt numeri trigonales triplicati, vnde generatim pro numero n erit iſte exponens $\frac{3nn+3n}{2}$. Verum hi termini ſequuntur binas poteſtates ipſius x procedentes per eandem differentium n, vnde numerum n ab hac formula bis ſubtrahendo orientur binae poteſtates in ſeriem quaeſitam ingredientes, quarum exponentes conſequenter erunt $\frac{3nn+n}{2}$ et $\frac{3nn-n}{2}$.

§. 17. Hinc igitur viciſſim patet, ſeriem

$$s = 1 - x - xx + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - \text{ etc.}$$

in infinitum continuatam habere infinitos factores, qui ſcilicet erunt $(1 - x)$, $1 - xx$, $1 - x^3$, $1 - x^4$, $1 - x^5$, etc. ita vt ſi primo diuidatur per $1 - x$, tum vero quotus per $1 - xx$, iſte quotus porro per $1 - x^3$, hocque modo in infinitum diuiſio continuetur, vltimum quotum reſultantem vnitati aequalem eſſe oportebit.

§. 18. Quod ſi ergo propoſita fuerit iſta aequatio in infinitum excurrens:

$$1 - x - xx + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \text{etc.} = 0,$$

eius omnes radices facile aſſignari poſſunt. Primum enim radix erit $x = 1$, deinde binae radices quadratae ex vnitate, tum vero ternae radices cubicae ex vnitate, porro quaternae radices biquadratae ex vnitate, ſimilique modo quinae radices poteſtatis quintae ex vnitate, et ita porro, inter quas igitur ipſa vnitas infinities occurrit; at vero -1 ibi reperietur, vbi radix poteſtatis paris eſt extrahenda.

DE

DE
MIRABILIBVS PROPRIETATIBVS
NVMERORVM PENTAGONALIVM.

Auctore
L. EVLERO.

§. 1.

Ad claſſem numerorum pentagonalium non ſolum eos refero, qui vulgo proprie ita nominari ſolent & in formula $\frac{3nn-n}{2}$ continentur, ſed etiam eos, quos iſta formula: $\frac{3nn+n}{2}$ ſuppeditat; ita vt formula generalis omnium horum numerorum ſit $\frac{3nn\pm n}{2}$, ex qua igitur naſcitur ſequens geminata numerorum ſeries, ſi loco n ſucceſſiue ſcribantur ordine numeri 0, 1, 2, 3, 4, etc.

n	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6
Numeri	0,	1,	5,	12,	22,	35,	51
pentagon.	0,	2,	7,	15,	26,	40,	57

Quilibet ſcilicet numerus pro n aſſumtus duos producit numeros, quos hic ſibi inuicem ſubſcripſi, ita vt ſeries ſuperior contineat numeros pentagonales proprie ita dictos, inferior vero eos, quos hic quoque ad eandem claſſem refero, et qui oriuntur ſi ſuperior ſeries retro continuetur.

tur. Hic autem binos coniunctim exhibeo, qui ex eodem numero n in formula $\frac{3nn \mp n}{2}$ oriuntur, quoniam in ſequentibus eos horum numerorum diſtinguemus, qui vel ex numeris paribus vel imparibus pro n aſſumtis naſcuntur.

§. 2. Quod ſi hos numeros ordine magnitudinis in vnam ſeriem coniiciamus, orietur iſta progreſſio:

$$0, 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, 51, 57, \text{etc.}$$

cuius ordo manifeſto eſt interruptus, quoniam progreſſio differentiarum hinc fit

$$1, 1, 3, 2, 5, 3, 7, 4, 9, 5, 11, \text{etc.}$$

quae mixta eſt ex ſerie numerorum naturalium et imparium. At vero iſta ſeries ad continuitatem perduci poteſt, ſi poſt tertium quemque terminum certa fractio interpoletur. Scilicet inter terminos 2 et 5 conſtituatur $\frac{10}{3}$, tum vero $\frac{28}{3}$ inter 7 et 12, porro $\frac{55}{3}$ inter 15 et 22, ita vt ſeries completa ſit

$$1, 2, \tfrac{10}{3}, 5, 7, \tfrac{28}{3}, 12, 15, \tfrac{55}{3}, 22, 26, \text{etc.}$$

ſic enim ſeries differentiarum lege continua procedet, dum erit

$$1, \tfrac{4}{3}, \tfrac{5}{3}, 2, \tfrac{7}{3}, \tfrac{8}{3}, 3, \tfrac{10}{3}, \tfrac{11}{3}, 4, \text{etc.}$$

Manifeſtum autem eſt, illam ſeriem oriri, ſi omnes numeri trigonales per 3 diuidantur. Hinc igitur iam pulchra ſe offert proprietas noſtrorum numerorum pentagonalium, quod ſinguli ter ſumti euadant numeri trigonales.

§. 3. Tales autem proprietates, quas immediate ex formulis generalibus deriuare licet, etiam in aliis numeris polygonalibus locum habere poſſunt, ad quas igi-

tur non reſpicio; cum mihi potius propoſitum ſit quasdam proprietates admirabiles commemorare, quibus numeri pentagonales prae omnibus reliquis polygonalibus ſunt praediti. Atque hic occurrit illa inſignis horum numerorum proprietas, qua iam olim oſtendi, iſtam numerorum pentagonalium ſeriem tam arcte cum progreſſione, quam ſummae diuiſorum numerorum naturalium conſtituunt, eſſe connexam, vt eius ope adeo lex iſtius ſeriei maxime irregularis aſſignari poſſit, id quod breuiter repetere operae pretium erit.

§. 4. Quod ſi quilibet numerus N cum ſuis diuiſoribus in vnam ſummam colligatur, quam ſummam hoc charactere: $\int N$ indicemus, ex numeris naturalibus ſequens naſcetur ſeries primo intuitu maxime irregularis:

N	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11
$\int N$	1,	3,	4,	7,	6,	12,	8,	15,	13,	18,	12

vbi termini tam inordinate progrediuntur, dum modo creſcunt modo decreſcunt, vt vix quisquam eorum legem deteget, quandoquidem iſta ſeries ordinem numerorum primorum manifeſto in ſe inuoluit.

§. 5. Interim tamen demonſtraui, iſtam progresſionem, quantumuis irregularem, ad claſſem ſerierum recurrentium eſſe referendam, et ſingulos eius terminos ſecundum certam legem ex praecedentibus determinari poſſe. Quod ſi enim $\int N$ denotet ſummam omnium diuiſorum huius numeri N, ipſo non excepto, inueni ſemper fore

$$\int N = \int(N-1) + \int(N-2) - \int(N-5) - \int(N-7) + \int(N-12) + \int(N-15) - \int(N-22) - \int(N-26) + \text{etc.}$$

vbi

vbi numeri, qui ſucceſſiue ab N ſubtrahuntur, conſtituunt manifeſto noſtram ſeriem numerorum pentagonalium

$$1,\ 2,\ 5,\ 7,\ 12,\ 15,\ 22,\ 26,\ 35,\ 40,\ \text{etc.}$$

ita vt termini, ex numeris imparibus pro *n* aſſumtis oriundi habeant ſignum +, qui vero ex paribus naſcuntur ſignum −. Tum vero, quouis caſu has formulas eo vsque continuari oportet, quoad numeri poſt ſignum ∫ ſcripti non euadant negatiui; at ſi occurrat formula $\int(N - N)$, eius loco ſcribi debet ipſe numerus N. Ita ſi ſumamus $N = 12$, erit

$$\int 12 = \int 11 + \int 10 - \int 7 - \int 5 + \int 0$$

ideoque erit

$$\int 12 = 12 + 18 - 8 - 6 + 12 = 28.$$

At vero ſi ſumamus $N = 13$, erit

$$\int 13 = \int 12 + \int 11 - \int 8 - \int 6 + \int 1$$

ſiue erit

$$\int 13 = 28 + 12 - 15 - 12 + 1 = 14.$$

§. 6. Quoniam igitur ordo, quo ſummae diuiſorum progrediuntur, merito maxime irregularis videtur, nemini certe in mentem venire potuit, eum per numeros pentagonales explorari potuiſſe, ex quo iſta ſpeculatio vtique maxime eſt admiranda. Afferam autem adhuc aliam eiusmodi proprietatem, quae quidem cum expoſita arctiſſime eſt connexa, attamen ad plures non minus admirandas proprietates perducit, quae omnes pariter in natura numerorum noſtrorum pentagonalium ſunt ſundatae.

 §. 7.

§. 7. Fundamentum autem omnium harum mirabilium proprietatum in euolutione huius producti infiniti:

$$S = (1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)(\text{etc.}$$

continetur: demonſtraui enim, ſi ſinguli hi factores actu in ſe inuicem multiplicentur, tum denique reſultare illam ſeriem:

$$S = 1 - x^1 - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \text{etc.}$$

vbi exponentes ipſius x conſtituunt noſtram ſeriem numerorum pentagonalium, ratione ſignorum autem + et − ambo alternatim geminantur, ita vt qui exponentes ex numeris paribus pro n aſſumtis oriuntur, eae poteſtates habeant ſignum +, reliqui vero ex imparibus ortis ſignum −. Haec igitur non minus admirationem noſtram meretur quam proprietas ante commemorata, cum nulla certe appareat ratio, vnde vllus nexus intelligi poſſit inter euolutionem illius producti et noſtros numeros pentagonales.

§. 8. Cum igitur ſeries iſta poteſtatum ipſius x aequalis ſit producto illi infinito, ſi eam nihilo aequalem ſtatuamus, vt habeamus hanc aequationem:

$$0 = 1 - x^1 - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \text{etc.}$$

ea omnes easdem inuoluet radices, quas productum illud nihilo aequatum includit. Ex primo ſcilicet factore $1 - x$ erit $x = 1$; ex ſecundo factore $1 - xx$ erit vel $x = +1$ vel $x = -1$; ex tertio factore $1 - x^3$ naſcuntur hae tres radices:

1°) $x = 1$, 2°) $x = -\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$, 3°) $x = -\frac{1-\sqrt{-3}}{2}$;

ex quarto autem factore $1 - x^4 = 0$ oriuntur hae quatuor radices:

1°)

1°) $x = +1$; 2°) $x = -1$, 3°) $= x = +\sqrt{-1}$ et
4°) $x = -\sqrt{-1}$;

quintus autem factor $1 - x^5 = 0$ ſuppeditat has quinque radices:

1°) $x = 1$, 2°) $x = \frac{-1 - \sqrt{5} + \sqrt{(-10 + 2\sqrt{5})}}{4}$

3°) $x = \frac{-1 - \sqrt{5} - \sqrt{(-10 + 2\sqrt{5})}}{4}$, 4°) $x = \frac{-1 + \sqrt{5} + \sqrt{(-10 - 2\sqrt{5})}}{4}$

5°) $x = \frac{-1 + \sqrt{5} - \sqrt{(-10 - 2\sqrt{5})}}{4}$;

ſextus autem factor praebet has ſex radices:

1°) $x = 1$, 2°) $x = -1$, 3°) $x = \frac{+1 + \sqrt{-3}}{2}$,

4°) $x = \frac{+1 - \sqrt{-3}}{2}$, 5°) $x = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$,

6°) $x = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$, etc. etc.

§. 9. Hinc igitur patet, omnes radices cuiuscunque poteſtatis ex vnitate ſimul eſſe radices noſtrae aequationis. Ac ſi rem in genere conſideremus, ponendo $1 - x^n = 0$, primo patet, vnam radicem ſemper eſſe $x = 1$, ac ſi n fuerit numerus par, aliam radicem fore $x = -1$. Pro reliquis autem radicibus conſiderari debent factores trinomiales formulae $1 - x^n$, qui, vti alibi ſatis eſt expoſitum, in hac forma generali continentur:

$$1 - 2x \operatorname{coſ.} \frac{2i\pi}{n} + xx,$$

ſumendo pro i ſucceſſiue omnes numeros integros ipſo $\frac{1}{2}n$ non maiores. Hoc autem factore nihilo aequato eruuntur iſtae duae radices:

$$x = \operatorname{coſ.} \frac{2i\pi}{n} + \sqrt{-1} \operatorname{ſin.} \frac{2i\pi}{n} \text{ et}$$
$$x = \operatorname{coſ.} \frac{2i\pi}{n} - \sqrt{-1} \operatorname{ſin.} \frac{2i\pi}{n}.$$

Hinc enim viciſſim fit

$$x^n = \cos. 2i\pi \pm \sqrt{-1} \sin. 2i\pi.$$

Eſt autem $\cos. 2i\pi = 1$ et $\sin. 2i\pi = 0$, ideoque $x^n = 1$; vnde, ſi pro n et i ſucceſſiue omnes numeri integri accipiantur, haec forma:

$$x = \cos. \tfrac{2i\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \sin. \tfrac{2i\pi}{n}$$

praebebit omnes radices noſtrae aequationis

$$0 = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \text{etc.}$$

ita vt iſtius aequationis omnes plane radices aſſignare valeamus.

§. 10. Quod ſi ergo omnes radices iſtius aequationis litteris α, β, γ, δ, ε, etc. indicemus, eius factores erunt $\frac{1-x}{\alpha}$, $\frac{1-x}{\beta}$, $\frac{1-x}{\gamma}$, $\frac{1-x}{\delta}$, etc. vnde ex natura aequationum colligimus fore ſummam omnium harum fractionum: $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} +$ etc. $= 1$, ſummam vero productorum ex binis $= -1$, tum vero ſummam productorum ex ternis $= 0$, ſummam productorum ex quaternis $= 0$, ſummam productorum ex quinis $= -1$, ſummam productorum ex ſenis $= 0$, ſummam productorum ex ſeptenis $= -1$, etc. Hinc autem porro concludimus fore ſummam quadratorum illarum fractionum, ſcilicet

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\delta^2} + \text{etc.} = 3,$$

ſummam cuborum

$$\frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3} + \frac{1}{\gamma^3} + \frac{1}{\delta^3} + \text{etc.} = 4,$$

ſummam biquadratorum

$$\frac{1}{\alpha^4} + \frac{1}{\beta^4} + \frac{1}{\gamma^4} + \frac{1}{\delta^4} + \text{etc.} = 7,$$

et ita porro; vbi quidem nullus ordo perſpicitur.

§. 11.

§. 11. Quod autem hic de fractionibus $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$, etc. diximus, etiam de ipſius radicibus α, β, γ, etc. valet. Si enim α fuerit radix noſtrae aequationis, per ea quae oſtendimus haec radix continetur in hac formula:

$$\cos. \frac{2i\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \sin. \frac{2i\pi}{n}.$$

Hinc autem fit

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\cos. \frac{2i\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \sin. \frac{2i\pi}{n}} = \cos. \frac{2i\pi}{n} \mp \sqrt{-1} \sin. \frac{2i\pi}{n},$$

quae itidem eſt radix noſtrae aequationis; vnde patet, ſi $\frac{1}{\alpha}$ fuerit radix noſtrae aequationis, etiam α fore radicem.

§. 12. Denotet igitur α radicem quamcunque aequationis $1 - x^n = 0$, quandoquidem tum etiam erit radix noſtrae aequationis

$$1 - x - xx + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \text{etc.} = 0,$$

tum igitur erit $\alpha^n = 1$. Praeterea vero etiam omnes poteſtates ipſius α radices ſimul erunt aequationis $1 - x^n = 0$. Si enim loco x ſcribamus $\alpha\alpha$ fiet $1 - x^n = 1 - \alpha^{2n}$. Cum autem ſit $\alpha^n = 1$, paret etiam fore $\alpha^{2n} = 1$, ideoque $1 - \alpha^{2n} = 0$, quod idem manifeſtum eſt de cubo α^3 et omnibus poteſtatibus altioribus. Hinc igitur ſequitur fore

$$\alpha^{n+1} = \alpha \text{ et } \alpha^{n+2} = \alpha\alpha \text{ et } \alpha^{n+3} = \alpha^3.$$

Sicque in genere erit $\alpha^{in+\lambda} = \alpha^\lambda$.

§. 13. Si igitur α denotet radicem quamcunque noſtrae aequationis, ita vt ſit $\alpha^n = 1$, ſi in ea loco x ſcribamus α, certe euadet haec ſeries:

$$1 - \alpha^1 - \alpha^2 + \alpha^5 + \alpha^7 - \alpha^{12} - \alpha^{15} + \alpha^{22} + \text{etc.} = 0.$$

Prae-

Praeterea vero etiam ponendo $x = \alpha\alpha$ erit

$$1 - \alpha^2 - \alpha^4 + \alpha^{10} + \alpha^{14} - \alpha^{24} - \alpha^{30} + \alpha^{44} + \text{etc.} = 0,$$

et in genere ſi loco x ſcribamus α^i, denotante i numerum quemcunque integrum, etiam fiet

$$1 - \alpha^i - \alpha^{2i} + \alpha^{5i} + \alpha^{7i} - \alpha^{12i} - \alpha^{15i} + \alpha^{22i} + \text{etc.} = 0.$$

Atque hoc etiam valebit, ſi pro i numeri negatiui accipiantur, ſi quidem oſtendimus, radices quoque eſſe $\frac{1}{\alpha^2}$, $\frac{1}{\alpha^3}$, $\frac{1}{\alpha^4}$, $\frac{1}{\alpha^5}$, etc.

§. 14. Quoniam hic aſſumſimus α eſſe radicem aequationis $1 - x^n = 0$, percurramus ordine caſus, quibus eſt n vel 1 vel 2, vel 3, vel 4, etc. Ac primo quidem, ſi $n = 1$, neceſſario eſt $\alpha = 1$, quo valore ſubſtituto noſtra aequatio generalis induet hanc formam:

$$1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + \text{etc.}$$

quae ſeries manifeſto ex infinitis periodis conſtatur, quarum ſingulae continent hos terminos: $1 - 1 - 1 + 1$, vnde cuiusque periodi valor eſt $= 0$, ideoque etiam infinitae periodi ſimul ſumti ſummam habebunt $= 0$. Quoniam autem continuata concipi debet, ſi percurſis iam infinitis periodis inſuper vnus terminus accedat, ſumma erit $= 0$; ſi tres accedant, ſumma erit -1 et ſi quatuor accedant $= 0$, quo caſu tota periodus eſt adiecta; quare, cum numerus infinitus nusquam terminetur, ſumma ſeriei infinitae medium tenebit inter 4 ſummas modo memoratas $1, 0, -1, 0$, quod medium reperitur, ſi aggregatum harum quatuor ſummarum per numerum, hoc eſt per quaternarium diuidatur; tum autem manifeſto prodit 0, quae ergo vera cenſenda eſt ſumma noſtrae ſeriei.

§. 15.

§. 15. Simile ſcilicet ratiocinium hic adhiberi poteſt, quo vulgo oſtendi ſolet ſummam ſeriei *Leibnizianae* $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 +$ etc. eſſe $= \frac{1}{2}$; hoc autem conceſſo veritas praeſentis aſſerti ſponte elucet. Cum enim ſit

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.} = \tfrac{1}{2}, \text{ erit}$$

$$- 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \text{etc.} = - \tfrac{1}{2}$$

ergo combinandis his duabus ſeriebus erit

$$1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - \text{etc.} = 0.$$

§. 16. Conſideremus nunc caſum quo $n = 2$ et $\alpha\alpha = 1$, vbi quidem eſt α vel $+ 1$ vel $- 1$. Retineamus autem litteram α pro vtrauis earum deſignanda, et cum ſit

$$\alpha^3 = \alpha, \; \alpha^4 = 1, \; \alpha^5 = \alpha, \; \alpha^6 = 1, \text{ etc.}$$

facta ſubſtitutione noſtra aequatio generalis hanc induet formam:

$$1 - \alpha - 1 + \alpha + \alpha - 1 - \alpha + 1 \,|\, + 1 - \alpha - 1 + \alpha + \alpha - 1 - \alpha + 1 \text{ etc.}$$

quae ſeries pariter per certas periodos progreditur, quae continuo replicantur, atque vnaquaeque earum conſtat ex his octo terminis:

$$1 - \alpha - 1 + \alpha + \alpha - 1 - \alpha + 1,$$

quorum ſumma eſt o, ſicque numerus quantumuis magnus talium integrarum periodorum certe euaneſcit. At ſi vero inſuper vnus, vel duo, vel 3, vel ad eo 8 termini accedant, ſummae ſequenti modo ſe habebunt:

ſi inſuper accedat	ſumma erit
vnus terminus -	1
duo - - -	$1-\alpha$
tres - - -	$-\alpha$
quatuor - -	0
quinque - -	α
ſex - - -	$\alpha-1$
ſeptem - -	-1
octo - - -	0

quarum octo ſummarum aggregatum eſt o, vnde tuto concludimus totius huius ſeriei, quam inuenimus, in infinitum continuatae ſummam eſſe $= 0$.

§. 17. Hinc patet, ſummam huius ſeriei periodicae perinde nihilo aequari, quemcunque valorem habuerit littera α; verus enim valor ipſius α, quo eſt $\alpha\alpha = 1$, iam in conſiderationem eſt ductus, dum ipſae periodi ex eo ſunt natae; quamobrem haec ſeries in duas partes diſpeſci poteſt, quarum altera contineat ſolas vnitates, altera vero ſolas litteras α; ac neceſſe eſt, vt vtriusque ſumma ſeorſim nihilo fiat aequalis, ita vt ſit

$$1-1-1+1,\ +1-1-1+1,\ +1-1-1+1,\ \text{etc.} = 0$$
$$-\alpha+\alpha+\alpha-\alpha,\ -\alpha+\alpha+\alpha-\alpha,\ -\alpha+\alpha+\alpha-\alpha,\ \text{etc.} = 0,$$

vtriusque autem veritas ex poſitis principiis ſit manifeſta.

§. 18. Simili modo res ſe habebit in radicibus cubicis ipſius 1, ponendo $\alpha^3 = 1$, et quoniam periodi ad plures terminos excurrent, ſeriem generalem per binos terminos ſibi ſubſcriptos referamus, vt ſit in genere

$$\left.\begin{array}{l} 1-\alpha+\alpha^5-\alpha^{12}+\alpha^{22}-\alpha^{35}\text{ etc.}\\ \quad-\alpha^2+\alpha^7-\alpha^{15}+\alpha^{26}-\alpha^{40}\text{ etc.}\end{array}\right\}=0.$$

Quod ſi iam ſumatur $\alpha^3=1$, vt ſit

$$\alpha^4=\alpha,\ \alpha^5=\alpha^2,\ \alpha^6=1,\ \alpha^7=\alpha,\ \text{etc.}$$

prodibit ſequens progreſſio periodica:

$$\left.\begin{array}{l} 1-\alpha+\alpha^2-1+\alpha-\alpha^2+1\,|-\alpha+\alpha^2-1+\alpha-\alpha^2+1\,| \\ \quad-\alpha^2+\alpha-1+\alpha^2-\alpha\,|+1-\alpha^2+\alpha-1+\alpha^2-\alpha\,|+1 \end{array}\right.\text{ etc.}$$

nihilo aequalis, vbi quaelibet periodus conſtat duodecim terminis triplicis generis, ſcilicet 1, α, α^2. Ac facile apparet, terminos cuiusque generis ſeorſim ſumtos ſeriem exhibere nihilo aequalem, vnitates enim conſtituunt hanc ſeriem:

$$1-1-1+1,\ +1-1-1+1,\ +1-1-1+1,\ \text{etc.}=0$$

litterae vero α et $\alpha\alpha$ conſtituunt ſequentes ſeries:

$$-\alpha+\alpha+\alpha-\alpha,\ -\alpha+\alpha+\alpha-\alpha,\ -\alpha+\alpha+\alpha-\alpha,\ \text{etc.}=0$$

$$-\alpha^2+\alpha^2+\alpha^2-\alpha^2,\ -\alpha^2+\alpha^2+\alpha^2-\alpha^2,\ -\alpha^2+\alpha^2+\alpha^2-\alpha^2,\ \text{etc.}=0.$$

Harum autem ſingularum ſummas nihilo aequales eſſe manifeſtum eſt.

§. 19. Conſideremus porro etiam radices biquadratas vnitatis, ſitque $\alpha^4=1$, ac prodibit ſequens ſeries periodica:

$$\begin{array}{l} 1-\alpha+\alpha-1+\alpha^2-\alpha^3+\alpha^3-\alpha^2+1\,|-\alpha+\alpha-1+\text{ etc.}\\ \quad-\alpha^2+\alpha^3-\alpha^3+\alpha^2-1+\alpha-\alpha\,|+1-\alpha^2+\alpha^3-\alpha^3+\text{ etc.}\end{array}$$

vbi ſingulae periodi conſtant ex ſedecim terminis, qui ad quatuor genera relati praebent ſequentes quatuor ſeries, ſingulas nihilo aequales:

$$1 - 1 - 1 + 1,\ +1 - 1 - 1 + 1,\ +1 - 1 - 1 + 1,\ \text{etc.} = 0$$
$$-\alpha + \alpha + \alpha - \alpha,\ -\alpha + \alpha + \alpha - \alpha,\ -\alpha + \alpha + \alpha - \alpha,\ \text{etc.} = 0$$
$$-\alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2 - \alpha^2,\ -\alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2 - \alpha^2,\ -\alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2 - \alpha^2,\ \text{etc.} = 0$$
$$+\alpha^3 - \alpha^3 - \alpha^3 + \alpha^3,\ +\alpha^3 - \alpha^3 - \alpha^3 + \alpha^3,\ +\alpha^3 - \alpha^3 - \alpha^3 + \alpha^3,\ \text{etc.} = 0$$

§. 20. Quamquam hinc noſtra concluſio pro radicibus altioribus iam ſatis eſt confirmata, tamen neceſſe eſt inſuper caſum, quo $\alpha^5 = 1$, euoluere, quandoquidem hic non omnes poteſtates quinta inferiores occurrent. Sit igitur $\alpha^5 = 1$ et haec ſeries periodica prodibit:

$$\begin{matrix} 1 - \alpha + 1 - \alpha^2 + \alpha^2 - 1 + \alpha - 1 + \alpha^2 - \alpha^2 + 1 \,|\, -\alpha + 1 \\ -\alpha^2 + \alpha^2 - 1 + \alpha - 1 + \alpha^2 - \alpha^2 + 1 - \alpha \,|\, +1 - \alpha^2 + \alpha^2 \end{matrix} \quad \text{etc.}$$

vbi poteſtates α^3 et α^4 penitus excluduntur. Quare cum quaelibet periodus 20 conſtet terminis, reliquae poteſtates ſaepius occurrant neceſſe eſt; ſingulis autem ſeorſim ſumtis tres ſequentes ſeries periodicae occurrunt:

$$1 + 1 - 1 - 1 - 1 - 1 + 1 + 1,\ 1 + 1 - 1 - 1 - 1 - 1 + 1 + 1,\ \text{etc.} = 0$$
$$-\alpha + \alpha + \alpha - \alpha,\ -\alpha + \alpha + \alpha - \alpha,\ -\alpha + \alpha + \alpha - \alpha,\ \text{etc.} = 0$$
$$-\alpha^2 + \alpha^2 - \alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2 - \alpha^2 + \alpha^2 - \alpha^2,\ -\alpha^2 + \alpha^2 - \alpha^2 + \alpha^2,\ \text{etc.} = 0$$

Hinc iam veritas ſeriei ipſarum α ex praecedentibus eſt manifeſta; binae reliquae autem, quarum periodi octo terminis conſtant, ſi ſecundum principia hactenus ſtabilita examinentur, etiam nihilo aequales deprehendentur, quoniam non ſolum termini ſolius periodi ſe mutuo deſtruunt, ſed etiam termini ſeriei ſummatricis inde formatae. Ita ex ſerie vnitatum oritur haec ſeries ſummatrix:

$$1,\ 2,\ 1,\ 0,\ -1,\ -2,\ -1,\ 0:$$

cuius ſumma itidem euaneſcit, quod idem vſu venit in ſerie quadratorum.

§. 21.

§. 21. Ex his iam abunde patet, eandem proprietatem etiam in radicibus altioribus locum eſſe habituram, ex quotcunque etiam terminis ſingulae periodi fuerint compoſitae; quod certe eo magis eſt mirandum, cum iſta proprietas in nullas alias ſeries poteſtatum competere poſſit, atque penitus propria ſit ſeriei numerorum pentagonalium.

§. 22. Vt autem rem in genere ob oculos ponamus, ſit $\alpha^n = 1$, vnde naſcuntur periodi ex $4n$ terminis conſtantes, qui erunt vel 1, vel α, vel α^2, vel α^3 etc. Plerumque autem non omnes poteſtates inferiores quam α^n occurrent, vnde periodi ſingularum poteſtatum ipſius α plerumque pluribus quam 4 terminis conſtabunt. Semper autem non ſolum ipſi termini cuiusque periodi ſe mutuo deſtruent, ſed etiam termini ſeriei ſummatricis. Ita ſi conſideremus poteſtates α^r, exiſtente r numero minore quam n, ex ſerie noſtra numerorum pentagonalium omnes excerpantur termini, qui per n diuiſi hoc idem reſiduum r relinquant. Ac ſi cuique horum terminorum ſuum debitum ſignum praefigatur, talis prodibit ſeries:

$$\pm \alpha^r \pm \alpha^r \pm \alpha^r \pm \alpha^r \pm \alpha^r \pm \alpha^r \pm \alpha^r \pm \alpha^r \pm \text{etc.}$$

quae ſemper ex certis periodis ratione ſignorum + et — conſtabit, idque ita, vt cuiusque periodi omnes termini ſimul ſumti ſe mutuo deſtruant atque idem etiam in ſerie ſummatrice eueniat.

§. 23. Verum hac proprietates hactenus commemoratae inſuper innumerabiles alias non minus admirandas poſt ſe trahunt. Si enim α fuerit radix cuiusque po-

 teſtatis

teſtatis n ex vnitate, ita vt $1 - \frac{x}{\alpha}$ ſit factor formulae $1 - x^n$, euidens eſt, eum etiam fore factorem formularum $1 - x^{2n}$, $1 - x^{3n}$, $1 - x^{4n}$, etc. in infinitum. Quare, cum hae formulae omnes ſint factores noſtrae progreſſionis

$$1 - x - xx + x^5 + x^7 - x^{12} - \text{etc.}$$

eadem radix α in hac aequatione non tantum ſemel ſed adeo infinities occurrit, ita vt iſta aequatio infinitas habeat radices ipſi α aequales.

§. 24. Nouimus autem ex natura aequationum, ſi aequatio quaecunque

$$1 + Ax + Bxx + Cx^3 + Dx^4 + \text{etc.} = 0,$$

habeat duas radices aequales α, tum etiam α fore radicem aequationis per differentiationem natae, ſcilicet:

$$A + 2Bx + 3Cxx + 4Dx^3 + \text{etc.} = 0,$$

ac ſi habeat tres radices aequales α, tum inſuper α quoque erit radix iſtius aequationis per differentiationem natae, poſtquam ſcilicet illam aequationem differentialem per x multiplicauerimus

$$1^2.A + 2^2.Bx + 3^2.Cxx + 4^2.Dx^3 + \text{etc.} = 0,$$

vnde ſi haec aequatio habuerit λ radices aequales, quae ſingulae ſint $= \alpha$, ſemper erit

$$1^\lambda.A + 2^\lambda.B\alpha + 3^\lambda.C\alpha\alpha + 4^\lambda.D\alpha^3 + \text{etc.} = 0,$$

vnde ſi vniformitatis gratia hanc aequationem per α multiplicemus, erit quoque

$$1^\lambda.A\alpha + 2^\lambda.B\alpha^2 + 3^\lambda.C\alpha^3 + 4^\lambda.D\alpha^4 + \text{etc.} = 0.$$

§. 25. Cum igitur poſito $\alpha^n = 1$ noſtra aequatio ex numeris pentagonalibus formata

$$1 - x^1 - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \text{etc.} = 0,$$

habeat infinitas radices ipſi α aequales, erit quoque α radix omnium aequationum in hac forma generali contentarum:

$$-1^\lambda x - 2^\lambda x^2 + 5^\lambda x^5 + 7^\lambda x^7 - 12^\lambda x^{12} - \text{etc.} = 0$$

quicunque numerus integer pro λ accipiatur. Semper igitur erit

$$-1^\lambda \alpha - 2^\lambda \alpha^2 + 5^\lambda \alpha^5 + 7^\lambda \alpha^7 - 12^\lambda \alpha^{12} - \text{etc.} = 0.$$

§. 26. Ad hoc clarius oſtendendum ſumamus $\alpha = 1$, eritque ſemper

$$-1^\lambda - 2^\lambda + 5^\lambda + 7^\lambda - 12^\lambda - 15^\lambda + \text{etc.} = 0,$$

ac pro caſu $\lambda = 0$ veritatem iſtius aequationis iam probauimus. Sit igitur $\lambda = 1$ et monſtrandum erit, huius ſeriei diuergentis infinitae:

$$-1 - 2 + 5 + 7 - 12 - 15 + 22 + 26 - \text{etc.}$$

ſummam eſſe $= 0$. Quoniam autem haec ſeries eſt interrupta, ſeu potius ex duabus ſeriebus mixta, vtramque ſeorſim contemplemur, ponendo

$$s = -1 + 5 - 12 + 22 - 35 + \text{etc. et}$$
$$t = -2 + 7 - 15 + 26 - 40 + \text{etc.}$$

atque oſtendi oportet fore $s + t = 0$.

§. 27. Ex doctrina autem ſerierum, quae ſignis alternantibus procedunt, veluti $A - B + C - D + \text{etc.}$ conſtat, huius ſeriei in infinitum progredientis ſummam eſſe

$$= \tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{4}(B - A) + \tfrac{1}{8}(C - 2B + A) - \tfrac{1}{16}(D - 3C + 3B - A)\,\text{etc.}$$

quae

quae regula ita commodius per differentias exponitur, ſcilicet ratione ſignorum ſepoſita. Ex ſerie numerorum A, B, C, D, E, etc. formetur ſeries differentiarum, dum quilibet terminus illius ſeriei a ſequente ſubtrahitur, quae ſit a, b, c, d, etc. Eadem porro lege ex hac ſerie differentiarum formetur ſeries ſecundarum differentiarum, quae ſit a', b', c', d', etc. ex hac porro ſeries tertiarum differentiarum, quae ſit a'', b'', c'', d'', e'', etc. atque hoc modo vlterius donec ad differentias conſtantes perueniatur. Tum autem ex terminis primis omnium harum ſerierum ſumma ſeriei propoſitae ita determinatur, vt ea ſit

$$\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{4}a + \tfrac{1}{8}a' - \tfrac{1}{16}a'' + \tfrac{1}{32}a''' - \tfrac{1}{64}a'''' + \text{etc.}$$

§. 28. Hac regula ſtabilita, cum ſignis mutatis ſit

$$-s = 1 - 5 + 12 - 22 + 35 - 51 + 70 - \text{etc. et}$$
$$-t = 2 - 7 + 15 - 26 + 40 - 57 + 77 - \text{etc.}$$

hi termini ſequenti modo diſponantur ac differentiae ſubſcribantur:

1, 5, 12, 22, 35, 51, 70 etc.	2, 7, 15, 26, 40, 57, 77 etc.
4, 7, 10, 13, 16, 19	5, 8, 11, 14, 17, 20
3, 3, 3, 3, 3	3, 3, 3, 3, 3
0, 0, 0, 0	0, 0, 0, 0

Hinc igitur colligitur fore

$$-s = \tfrac{1}{2} - \tfrac{4}{4} + \tfrac{3}{8} = -\tfrac{1}{8}, \text{ ſiue } s = \tfrac{1}{8}, \text{ porro}$$
$$-t = \tfrac{2}{2} - \tfrac{5}{4} + \tfrac{3}{8} = \tfrac{1}{8}, \quad \text{ſiue } t = -\tfrac{1}{8}$$

vnde manifeſto conficitur eſſe $s + t = 0$.

§. 29. Quanquam ipſae rationes, quibus hae proprietates innituntur, nullum plane dubium relinquunt: tamen haud inutile erit, iſtam veritatem etiam pro caſu $\lambda = 2$ oſtendiſſe, ſiue reuera eſſe

$$-1^2 - 2^2 + 5^2 + 7^2 - 12^2 - 15^2 + 22^2 + \text{etc.} = 0.$$

Diſcerpatur enim haec ſeries itidem in duas, quae ſint mutatis ſignis:

$$s = +1^2 - 5^2 + 12^2 - 22^2 + 35^2 - 51^2 + \text{etc.}$$

$$t = 2^2 - 7^2 + 15^2 - 26^2 + 40^2 - 57^2 + \text{etc.}$$

ac pro prioris ſumma inuenienda inſtituatur ſequens operatio:

Series	1, 25, 144, 484, 1225, 2601, 4900
Diff. I.	24, 119, 340, 741, 1376, 2299
Diff. II.	95, 221, 401, 635, 923
Diff. III.	126, 180, 234, 288
Diff. IV.	54, 54, 54
Diff. V.	0, 0

Hinc igitur erit

$$s = \tfrac{1}{2} - \tfrac{24}{4} + \tfrac{95}{8} - \tfrac{126}{16} + \tfrac{54}{32} = + \tfrac{3}{16}.$$

Simili modo pro altera ſerie

Series	4, 49, 225, 676, 1600, 3249, 5929
Diff. I.	45 176, 451, 924, 1649, 2680
Diff. II.	131, 275, 473, 725, 1031
Diff. III.	144 198, 252, 306
Diff. IV.	54, 54, 54
Diff. V.	0, 0

 Hinc

Hinc concluditur

$$t = \tfrac{4}{2} - \tfrac{45}{4} + \tfrac{121}{6} - \tfrac{144}{15} + \tfrac{54}{22} + - \tfrac{5}{15}.$$

Quamobrem euictum eſt totam ſummam fore $s + t = 0$.

§. 30. Conſideremus nunc etiam radices quadratas, ſiue ſit $\alpha^2 = 1$, hincque orietur iſta ſeries:

$$-1^\lambda.\alpha - 2^\lambda + 5^\lambda.\alpha + 7^\lambda\alpha - 12^\lambda - 15^\lambda.\alpha + 22^\lambda$$
$$+ 26^\lambda - \text{etc.} = 0,$$

vnde ſi terminos vnitatem et α continentes a ſe inuicem ſeparemus, binas obtinebimus ſeries nihilo aequales, ſcilicet:

$$-2^\lambda - 12^\lambda + 22^\lambda + 26^\lambda - 40^\lambda - 70^\lambda + 92^\lambda + \text{etc.} = 0$$

et

$$-1^\lambda.\alpha + 5^\lambda.\alpha + 7^\lambda.\alpha - 15^\lambda.\alpha - 35^\lambda.\alpha + 51^\lambda.\alpha$$
$$+ 57^\lambda.\alpha - \text{etc.} = 0.$$

Quod ſi vero harum ſerierum veritatem eodem modo, quo ante ſumus vſi, oſtendere vellemus, vnamquamque in quatuor alias ſeries diſcerpi oporteret, vt ſcilicet tandem ad differentias conſtantes perueniremus. At vero ſi quis hanc operam ſuſcipere voluerit, certus eſſe poterit, aggregatum omnium ſummarum partialium fore $= 0$.

§. 31. Nunc generaliſſime totum negotium complectamur, ſitque $\alpha^n = 1$, et quaeramus ſeriem, quae contineat tantum poteſtates α^r. Hunc in finem ex omnibus noſtris numeris pentagonalibus excerpamus eos, qui per n diuiſi relinquunt idem reſiduum r. Sint igitur iſti numeri pentagonales A, B, C, D, E, etc. omnes ſcilicet for-

mae

mae $\gamma n + r$, et cuiusque ſignum $\pm$, quod ipſi conuenit, ſollicite notetur. Tum autem ſemper erit

$$\pm A^\lambda \pm B^\lambda \pm C^\lambda \pm D^\lambda \pm \text{etc.} = 0,$$

quicunque valor integer exponenti λ tribuatur. Atque in hac forma generaliſſima omnes ſeries, quas hactenus eruimus, et quarum ſummas nihilo aequari oſtendimus, continentur.

INTÉGRATION

d'une eſpèce remarquable d'équations différentielles dans l'Analyſe des fonctions à deux variables, par l'introduction de nouvelles variables;

par

NICOLAS FUSS.

Si z marque une fonction quelconque des deux variables x & y, & qu'on deſigne par les caractères $(\frac{dz}{dx})$, $(\frac{ddz}{dx^2})$, $(\frac{d^3z}{dx^3})$, &c. les différentielles de cette fonction, en prennant la ſeule x pour variable; par $(\frac{dz}{dy})$, $(\frac{ddz}{dy^2})$, $(\frac{d^3z}{dy^3})$, &c. les différentielles de la même fonction pour la variabilité de la ſeule y; par $(\frac{ddz}{dxdy})$, $(\frac{d^3z}{dxdy^2})$, $(\frac{d^4z}{dxdy^3})$, etc. les différentielles, en ne prennant x variable qu'une fois, & ainſi de ſuite, & qu'on forme de ces différens ordres de différentielles les expreſſions ſuivantes:

$$P = x(\frac{dz}{dx}) + y(\frac{dz}{dy}),$$

$$Q = x^2(\frac{ddz}{dx^2}) + 2xy(\frac{ddz}{dxdy}) + y^2(\frac{ddz}{dy^2}),$$

$$R = x^3(\frac{d^3z}{dx^3}) + 3x^2y(\frac{d^3z}{dx^2dy}) + 3xy^2(\frac{d^3z}{dxdy^2}) + y^3(\frac{d^3z}{dy^3}),$$

etc. etc.

il s'agira de trouver les intégrales complettes de ces équations:

$$P = 0,$$

$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0, \quad S = 0,$ etc.

& des équations compoſées de celles-là:

$Az + BP = 0,$

$Az + BP + CQ = 0,$

$Az + BP + CQ + DR = 0,$

etc.

objet qui pourra être rempli très facilement par l'uſage de deux nouvelles variables t & u de la fonction propoſée.

Mais avant que d'introduire ces nouvelles variables, il ſera bon de chercher la relation qui ſubſiſte entre les formules P, Q, R, S, etc. dont chacune peut être tirée de celle qui la précède immediatement, comme on verra par le Problème ſuivant.

Problème I.

Trouver le rapport qu'il y a entre les expreſſions P, Q, R, S, *etc. & leurs différentielles.*

Solution.

A cauſe de $P = x\left(\frac{dz}{dx}\right) + y\left(\frac{dz}{dy}\right)$ on aura

$\left(\frac{dP}{dx}\right) = \left(\frac{dz}{dx}\right) + x\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + y\left(\frac{ddz}{dxdy}\right)$ et

$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dz}{dy}\right) + y\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) + x\left(\frac{ddz}{dxdy}\right)$, donc

$$x\left(\frac{dP}{dx}\right) + y\left(\frac{dP}{dy}\right) = x\left(\frac{dz}{dx}\right) + y\left(\frac{dz}{dy}\right) + x^2\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + 2xy\left(\frac{ddz}{dxdy}\right) + y^2\left(\frac{ddz}{dy^2}\right),$$

équation qui ſe reduit évidemment à celle-ci:

$$x\left(\frac{dP}{dx}\right) + y\left(\frac{dP}{dy}\right) = P + Q.$$

 L'ex-

L'expreſſion

$$Q = x^2 \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + 2\,xy \left(\frac{ddz}{dx\,dy}\right) + y^2 \left(\frac{ddz}{dy^2}\right) \text{ donne}$$

$$\left(\frac{dQ}{dx}\right) = 2\,x \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + x^2 \left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) + 2\,y \left(\frac{ddz}{dx\,dy}\right)$$
$$+ 2\,xy \left(\frac{d^3z}{dx^2\,dy}\right) + y^2 \left(\frac{d^3z}{dx\,dy^2}\right), \;\&$$

$$\left(\frac{dQ}{dy}\right) = 2\,y \left(\frac{ddz}{dy^2}\right) + y^2 \left(\frac{d^3z}{dy^3}\right) + 2\,x \left(\frac{ddz}{dx\,dy}\right)$$
$$+ 2\,xy \left(\frac{d^3z}{dx\,dy^2}\right) + x^2 \left(\frac{d^3z}{dx^2\,dy}\right),$$

d'où l'on tire

$$x \left(\frac{dQ}{dx}\right) + y \left(\frac{dQ}{dy}\right) = 2\,x^2 \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + 4\,xy \left(\frac{ddz}{dx\,dy}\right)$$
$$+ 2\,y^2 \left(\frac{ddz}{dy^2}\right) + x^3 \left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) + 3\,x^2y \left(\frac{d^3z}{dx^2\,dy}\right)$$
$$+ 3\,xy^2 \left(\frac{d^3z}{dx\,dy^2}\right) + y^3 \left(\frac{d^3z}{dy^3}\right)$$

ou bien

$$x \left(\frac{dQ}{dx}\right) + y \left(\frac{dQ}{dy}\right) = 2\,Q + R.$$

De la même manière en cherchant de l'équation R les différentielles $\left(\frac{dR}{dx}\right)$ & $\left(\frac{dR}{dy}\right)$, la première multipliée par x ajoutée à l'autre multipliée par y donnera la relation ſuivante:

$$x \left(\frac{dR}{dx}\right) + y \left(\frac{dR}{dy}\right) = 3\,R + S;$$

& cette opération continuée pour l'expreſſion S fournira

$$x \left(\frac{dS}{dx}\right) + y \left(\frac{dS}{dy}\right) = 4\,S + T,$$

& ainſi de ſuite; d'où l'on voit facilement comment chaque expreſſion peut être déduite de la précédente. Le Problème ſuivant enſeignera la transformation des différentielles de la fonction z, exprimées par x & y, pour d'autres variables t & u.

Pro-

Problème 2.

Quand z *exprime une fonction quelconque de deux variables* x *&* y, *& qu'au lieu de ces variables on en introduit deux autres* t *&* u, *telles que* $x = tu$ *&* $y = u$, *trouver les valeurs des différentielles*

$$\left(\frac{dz}{dx}\right), \left(\frac{dz}{dy}\right), \left(\frac{ddz}{dx^2}\right), \left(\frac{ddz}{dxdy}\right), \left(\frac{ddz}{dy^2}\right), \&c.$$

exprimées par ces nouvelles variables.

Solution.

Soit pour les premières variables $dz = mdx + ndy$ & pour les nouvelles $dz = M\,dt + N\,du$, pour avoir

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = m, \left(\frac{dz}{dy}\right) = n; \left(\frac{dz}{dt}\right) = M, \left(\frac{dz}{du}\right) = N;$$

& puisque

$$x = tu, y = u, dx = tdu + udt, dy = du,$$

nous aurons

$$mdx + ndy = mtdu + mudt + ndu = dz = Mdt + Ndu,$$

& partant $M = mu$ & $N = mt + n$, d'où l'on tire

$$m = \frac{M}{u} \text{ \& } n = N - mt = N - \frac{t}{u}M,$$

ou bien, en introduiſant au lieu de m, n, M, N les différentielles, nous aurons

$$(\mathfrak{A}).\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{1}{u}\left(\frac{dz}{dt}\right);\ (\mathfrak{B}).\left(\frac{dz}{dy}\right) = \left(\frac{dz}{du}\right) - \frac{t}{u}\left(\frac{dz}{dt}\right).$$

Soit pour les différentielles ſecondes $\frac{1}{u}\left(\frac{dz}{dt}\right) = v$, & nous aurons $\left(\frac{dz}{dx}\right) = v$, & partant

$$\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = \left(\frac{dv}{dx}\right) = \frac{1}{u}\left(\frac{dv}{dt}\right)$$

(en vertu de l'équation $\mathfrak{A}$), donc

$$\left(\frac{dv}{dt}\right) = u\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = \frac{1}{u}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right),$$

(à

(à cauſe de $\left(\frac{dx}{dt}\right)=u$, ou bien $dx=u\,dt$) d'où l'on tire

$$(\mathfrak{C}.\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)=\frac{1}{uu}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right).$$

Enſuite, à cauſe de $\left(\frac{dz}{dx}\right)=v$, ou aura en prennant les differentielles

$$\left(\frac{ddz}{dx\,dy}\right)=\left(\frac{dv}{dy}\right).$$

Or, en mettant dans l'équation ($\mathfrak{B}$) v à la place de z, on obtient

$$\left(\frac{dv}{dy}\right)=\left(\frac{dv}{du}\right)-\frac{t}{u}\left(\frac{dv}{dt}\right);$$

mais $v=\frac{1}{u}\left(\frac{dz}{dt}\right)$, donc

$$\left(\frac{dv}{du}\right)=-\frac{1}{u^2}\left(\frac{dz}{dt}\right)+\frac{1}{u}\left(\frac{ddz}{dt\,du}\right) \;\&\; \left(\frac{dv}{dt}\right)=\frac{1}{u}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$$

& partant

$$\left(\frac{ddz}{dx\,dy}\right)=-\frac{1}{u^2}\left(\frac{dz}{dt}\right)+\frac{1}{u}\left(\frac{ddz}{dt\,du}\right)-\frac{t}{u^2}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right).$$

Enfin puiſqu'il y a en vertu de l'équation $\mathfrak{B}$:

$$\left(\frac{dz}{dy}\right)=\left(\frac{dz}{du}\right)-\frac{t}{u}\left(\frac{dz}{dt}\right)=v'$$

(pour abréger), on aura

$$\left(\frac{ddz}{dy^2}\right)=\left(\frac{dv'}{dy}\right)=\left(\frac{dv'}{du}\right)-\frac{t}{u}\left(\frac{dv'}{dt}\right),$$

(par analogie de $\mathfrak{B}$). Mais

$$\left(\frac{dv'}{du}\right)=\left(\frac{ddz}{du^2}\right)+\frac{t}{u^2}\left(\frac{dz}{dt}\right)-\frac{t}{u}\left(\frac{ddz}{dt\,du}\right) \;\&$$

$$\left(\frac{dv'}{dt}\right)=\left(\frac{ddz}{dt\,du}\right)-\frac{1}{u}\left(\frac{dz}{dt}\right)-\frac{t}{u}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right),$$

& partant

$$\left(\frac{ddz}{dy^2}\right)=\frac{2t}{u^2}\left(\frac{dz}{dt}\right)-\frac{2t}{u}\left(\frac{ddz}{dt\,du}\right)+\frac{tt}{uu}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)+\left(\frac{ddz}{du^2}\right).$$

Pour les troiſièmes differentielles nous mettrons pour abréger

$$(\mathfrak{C}).\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)=\frac{1}{u^2}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)=v'',$$

pour avoir

$$\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right)=\left(\frac{dv''}{dx}\right)=\frac{1}{u}\left(\frac{dv''}{dt}\right)$$

(en

(en vertu de 𝔄) & l'équation 𝕮 différentiée donne

$$\left(\frac{dv''}{dt}\right) = \frac{1}{u^3}\left(\frac{d^3 z}{dt^3}\right)$$

de ſorte que

$$\left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right) = \frac{1}{u^3}\left(\frac{d^3 z}{dt^3}\right).$$

On a de plus $\left(\frac{dv''}{dy}\right) = \left(\frac{d^3 z}{dx \cdot dy}\right)$, & en mettant au lieu de $\left(\frac{dv'}{dy}\right)$ l'expreſſion déduite de 𝕮, ſavoir :

$$\left(\frac{dv''}{du}\right) - \frac{t}{u}\left(\frac{dv''}{dt}\right),$$ on aura

$$\left(\frac{d^3 z}{dx^2 dy}\right) = \left(\frac{dv''}{du}\right) - \frac{t}{u}\left(\frac{dv''}{dt}\right).$$ Or

$$\left(\frac{dv''}{du}\right) = -\frac{2}{u^3}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) + \frac{1}{u^2}\left(\frac{d^3 z}{dt^2 du}\right)$$ &

$$\frac{t}{u}\left(\frac{dv''}{dt}\right) = \frac{t}{u^3}\left(\frac{d^3 z}{dt^3}\right),$$

ce qui étant ſubſtitué, donne

$$\left(\frac{d^3 z}{dx^2 dy}\right) = -\frac{2}{u^3}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) + \frac{1}{u^2}\left(\frac{d^3 z}{dt^2 du}\right) - \frac{t}{u^3}\left(\frac{d^3 z}{dt^3}\right).$$

Enſuite en mettant l'expreſſion trouvée ci deſſus

$$\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = \frac{2t}{u^2}\left(\frac{dz}{dt}\right) - \frac{2t}{u}\left(\frac{ddz}{dt\,du}\right) + \frac{tt}{u^2}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) + \left(\frac{ddx}{du^2}\right) = v'''$$

nous aurons

$$\left(\frac{d^3 z}{dx\,dy^2}\right) = \left(\frac{dv'''}{dx}\right) = \frac{1}{u}\left(\frac{dv'''}{dt}\right),$$ donc

$$\left(\frac{d\ z}{dx\,dy^2}\right) = \frac{1}{u}\Big(\frac{2}{u^2}\left(\frac{dz}{dt}\right) + \frac{4t}{u^2}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) - \frac{2}{u}\left(\frac{ddz}{dt\,du}\right)$$
$$+ \frac{tt}{u^2}\left(\frac{d^3 z}{dt^3}\right) - \frac{2t}{u}\left(\frac{d^3 z}{dt^2\,du}\right) + \left(\frac{d^3 z}{du\ dt}\right)\Big).$$

Enfin en prennant la différentielle de v''' pour y variable, on aura $\left(\frac{dv'''}{dy}\right) = \left(\frac{d^3 z}{dy^3}\right)$; ce qui donne

$$\left(\frac{d^3 z}{dy^3}\right) = \frac{dv''}{du} - \frac{t}{u}\left(\frac{dv'''}{dt}\right);$$

d'où, à cauſe de

$$\frac{dv'''}{du} = -\frac{4t}{u^3}\left(\frac{dz}{dt}\right) + \frac{4t}{u^2}\left(\frac{ddz}{dt\,du}\right) - \frac{2t}{u}\left(\frac{d^3 z}{dt\,du^2}\right)$$
$$+ \frac{tt}{u^2}\left(\frac{d^3 z}{dt^2 du}\right) - \frac{2tt}{u^3}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) + \left(\frac{d^6 z}{du^3}\right),$$ &

$$\frac{t}{u}\left(\frac{d\cdot y''}{dt}\right) = \frac{2t}{u^3}\left(\frac{dz}{dt}\right) - \frac{2t}{u^2}\left(\frac{ddz}{dt\,du}\right) + \frac{t}{u}\left(\frac{d^3 z}{dt\,du^2}\right) - \frac{2tt}{uu}\left(\frac{d^3 z}{dt^2\,du}\right)$$
$$+ \frac{4tt}{u^3}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) + \frac{t^3}{u^3}\left(\frac{d^3 z}{dt^3}\right)$$

on obtiendra pour $\left(\frac{d^3 z}{dy^3}\right)$ cette expreſſion :

$$\left(\frac{d^3 z}{dy^3}\right) = -\frac{6t}{u^3}\left(\frac{dz}{dt}\right) + \frac{6t}{u^2}\left(\frac{ddz}{dt\,du}\right) - \frac{6tt}{u^3}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) - \frac{t^3}{u^3}\left(\frac{d^3 z}{dt^3}\right)$$
$$+ \frac{3tt}{u^2}\left(\frac{d^3 z}{dt^2\,du}\right) - \frac{3t}{u}\left(\frac{d^3 z}{dt\,du^2}\right) + \left(\frac{d^3 z}{du^3}\right),$$

Nous avons donc pour le premier ordre des différentielles :

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{1}{u}\left(\frac{dz}{dt}\right).$$
$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = -\frac{t}{u}\left(\frac{dz}{dt}\right) + \left(\frac{dz}{du}\right).$$

Pour le ſecond ordre:

$$\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = \frac{1}{u^2}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right).$$
$$\left(\frac{ddz}{dx\,dy}\right) = -\frac{1}{u^2}\left(\frac{dz}{dt}\right) + \frac{1}{u}\left(\frac{ddz}{dt\,du}\right) - \frac{t}{u^2}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right).$$
$$\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = \frac{2t}{u^2}\left(\frac{dz}{dt}\right) - \frac{2t}{u}\left(\frac{ddz}{dt\,du}\right) + \frac{tt}{uu}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) + \left(\frac{ddz}{du^2}\right).$$

Pour le troiſième ordre:

$$\left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right) = \frac{1}{u^3}\left(\frac{d^3 z}{dt^3}\right).$$
$$\left(\frac{d^3 z}{dx^2\,dy}\right) = -\frac{2}{u^3}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) + \frac{1}{u^2}\left(\frac{d^3 z}{dt^2\,du}\right) - \frac{t}{u^3}\left(\frac{d^3 z}{dt^3}\right).$$
$$\left(\frac{d^3 z}{dx\,dy^2}\right) = \frac{2}{u^3}\left(\frac{dz}{dt}\right) - \frac{2}{u^2}\left(\frac{ddz}{dt\,du}\right) + \frac{4t}{u^3}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) + \frac{tt}{u^3}\left(\frac{d^3 z}{dt^3}\right)$$
$$- \frac{2t}{u^2}\left(\frac{d^3 z}{dt^2\,du}\right) + \frac{1}{u}\left(\frac{d^3 z}{dt\,du^2}\right).$$
$$\left(\frac{d^3 z}{dy^3}\right) = -\frac{6t}{u^3}\left(\frac{dz}{dt}\right) + \frac{6t}{u^2}\left(\frac{ddz}{dt\,du}\right) - \frac{6t^2}{u^3}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) - \frac{t^3}{u^3}\left(\frac{d^3 z}{dt^3}\right)$$
$$+ \frac{3t^2}{u^2}\left(\frac{d^3 z}{dt^2\,du}\right) - \frac{3t}{u}\left(\frac{d^3 z}{dt\,du^2}\right) + \left(\frac{d^3 z}{du^3}\right).$$

Il feroit ſuperflu de continuer ces opérations pour les ordres ſuperieurs. Il ſuffit d'avoir montré par ces détails le procedé qu'il faudra ſuivre pour cet effet.

Pro-

Probleme III.

Transformer les expreſſions P, Q, R, S, *etc. en introduiſant les nouvelles variables.*

Solution.

Si dans l'équation $P = x\left(\frac{dz}{dx}\right) + y\left(\frac{dz}{dy}\right)$ on met tu au lieu de x, & u au lieu de y, & qu'on ſubſtitue aux $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ les valeurs $\frac{1}{u}\left(\frac{dz}{dt}\right)$ & $\left(\frac{dz}{du}\right) - \frac{t}{u}\left(\frac{dz}{dt}\right)$, on obtient

$$P = t\left(\frac{dz}{dt}\right) + u\left(\frac{dz}{du}\right) - \frac{tu}{u}\left(\frac{dz}{dt}\right) = u\left(\frac{dz}{du}\right).$$

Les équations marquées par 𝔄 et 𝔅, en mettant P à la place de z, donnent

$$\left(\frac{dP}{dx}\right) = \frac{1}{u}\left(\frac{dP}{dt}\right) \text{ \& } \left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dP}{du}\right) - \frac{t}{u}\left(\frac{dP}{dt}\right),$$

d'où, à cauſe de $P = u\left(\frac{dz}{du}\right)$, l'on tire

$$\left(\frac{dP}{dx}\right) = \left(\frac{ddz}{dt\,du}\right) \text{ et } \left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dz}{du}\right) + u\left(\frac{ddz}{du^2}\right) - t\left(\frac{ddz}{dt\,du}\right)$$

& partant

$$x\left(\frac{dP}{dx}\right) + y\left(\frac{dQ}{dy}\right) = u\left(\frac{dz}{du}\right) + u^2\left(\frac{ddz}{du^2}\right). \quad \text{Or}$$

$$x\left(\frac{dP}{dx}\right) + y\left(\frac{dQ}{dy}\right) = P + Q,$$

comme nous avons vu dans le premier Problème, ce qui fournit cette équation :

$$u\left(\frac{dz}{du}\right) + u^2\left(\frac{ddz}{du^2}\right) = P + Q = u\left(\frac{dz}{du}\right) + Q,$$

donc

$$Q = u^2\left(\frac{ddz}{du^2}\right).$$

Les mêmes équations du ſecond Probleme 𝔄 et 𝔅 donnent

$$\left(\frac{dQ}{dx}\right) = \frac{1}{u}\left(\frac{dQ}{dt}\right) \text{ et } \left(\frac{dQ}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{du}\right) - \frac{t}{u}\left(\frac{dQ}{dt}\right),$$

 ou

ou bien, à cauſe de $Q = u^2 \left(\frac{d\,d\,z}{d\,u^2}\right)$, il y aura

$$\left(\frac{d\,Q}{d\,x}\right) = u \left(\frac{d^3\,z}{d\,t\,d\,u^2}\right) \;\&\; \left(\frac{d\,Q}{d\,y}\right) = 2\,u \left(\frac{d\,d\,z}{d\,u^2}\right) + u^2 \left(\frac{d^3\,z}{d\,u^3}\right) - t\,u \left(\frac{d^3\,z}{d\,t\,d\,u^2}\right)$$

& partant

$$x \left(\frac{d\,Q}{d\,x}\right) + y \left(\frac{d\,Q}{d\,y}\right) = 2\,u^2 \left(\frac{d\,d\,z}{d\,u^2}\right) + u^3 \left(\frac{d^3\,z}{d\,u^3}\right),$$

ce qui, à cauſe de

$$x \left(\frac{d\,Q}{d\,x}\right) + y \left(\frac{d\,Q}{d\,y}\right) = 2\,Q + R,$$

donne l'équation

$$2\,u^2 \left(\frac{d\,d\,z}{d\,u^2}\right) + u^3 \left(\frac{d^3\,z}{d\,u^3}\right) = 2\,Q + R = 2\,u^2 \left(\frac{d\,d\,z}{d\,u^2}\right) + R,$$

de laquelle on tire

$$R = u^3 \left(\frac{d^3\,z}{d\,u^3}\right).$$

Il y a donc par les nouvelles variables:

$$P = u \left(\frac{d\,z}{d\,u}\right),\; Q = u^2 \left(\frac{d\,d\,z}{d\,u^2}\right),\; R = u^3 \left(\frac{d^3\,z}{d\,u^3}\right),\; S = u^4 \left(\frac{d^4\,z}{d\,u^4}\right).$$

Corollaire.

La relation entre les P, Q, R, S, que nous avons trouvée dans le premier Problème, eſt encore très remarquable pour ces formules exprimées par les nouvelles variables. Car $P = u \left(\frac{d\,z}{d\,u}\right)$, donc

$$u \left(\frac{d\,P}{d\,u}\right) = u \left(\frac{d\,z}{d\,u}\right) + u^2 \left(\frac{d\,d\,z}{d\,u^2}\right) = P + Q,$$

$$u \left(\frac{d\,Q}{d\,u}\right) = 2\,u^2 \left(\frac{d\,d\,z}{d\,u^2}\right) + u^3 \left(\frac{d^3\,z}{d\,u^3}\right) = 2\,Q + R.$$

$$u \left(\frac{d\,R}{d\,u}\right) = 3\,u^3 \left(\frac{d^3\,z}{d\,u^3}\right) + u^4 \left(\frac{d^4\,z}{d\,u^4}\right) = 3\,R + S,$$

& ainſi de ſuite; rapports dont nous pourrons faire uſage dans la ſuite pour l'intégration des équations

$$A\,z + B\,P + C\,Q + \text{etc.} = 0,$$

à laquelle

à laquelle nous ferons précéder celle des équations ſimples dans les Problèmes ſuivans.

Problème 1.

Trouver l'intégrale complette de cette équation différentielle: u $\left(\frac{dz}{du}\right) = 0$.

Solution.

Dans l'équation $\left(\frac{dz}{du}\right) = 0$ la quantité t eſt ouvertement conſtante; en prennant l'intégrale on a z égal à une quantité conſtante, pour laquelle nous écrirons une fonction quelconque F de la conſtante t, de ſorte que $z = F : t$.

En revenant aux anciennes variables x et y on auroit $F : \frac{x}{y}$ pour l'intégrale de cette équation différentielle: $x \left(\frac{dz}{dx}\right) + y \left(\frac{dz}{dy}\right) = 0$.

Problème 2.

Trouver l'intégrale complette de cette équation différentielle du ſecond degré: u u $\left(\frac{ddz}{du^2}\right) = 0$.

Solution.

Comme la quantité t eſt auſſi conſtante dans cette équation $\left(\frac{ddz}{du^2}\right) = 0$, dont la premiere intégrale $\left(\frac{dz}{du}\right)$ eſt égale à une quantité conſtante, nous la mettrons égale à une fonction $F' : t$, pour avoir $\left(\frac{dz}{du}\right) = F' : t$, dont l'intégrale

$$z = \text{conſt.} + u\, F' : t = F : t + u\, F' : t.$$

 En

En exprimant cette équation par les variables x et y, nous aurions l'intégrale

$$z = F : \frac{x}{y} + y\, F' : \frac{x}{y},$$

pour cette équation differentielle du ſecond degré:

$$x^2 \left(\frac{d\,d\,z}{d\,x^2}\right) + 2\,x\,y \left(\frac{d\,d\,z}{d\,x\,d\,y}\right) + y^2 \left(\frac{d\,d\,z}{d\,y^2}\right) = 0.$$

Problème 3.

Trouver l'intégrale complette de cette équation differentielle du troiſième degré: $u^3 \left(\frac{d^3\,z}{d\,u^3}\right) = 0$.

Solution.

Aiant donc $\left(\frac{d^3\,z}{d\,u^3}\right) = 0$, ſi nous marquons par des fonctions de la conſtante t, ſavoir par $F : t$, $F' : t$, $F'' : t$, les conſtantes qui entrent par l'integration, nous aurons

$$\left(\frac{d\,d\,z}{d\,u^2}\right) = F'' : t;\ \left(\frac{d\,z}{d\,u}\right) = F' : t + u\,F'' : t \text{ et}$$

$$z + F : t + u\,F' : t + u^2\,F'' : t.$$

Ainſi en reprennant les variables x et y on a

$$z = F : \frac{x}{y} + y\,F' : \frac{x}{y} + y^2\,F'' \frac{x}{y},$$

pour l'intégrale de l'équation differentielle que voici:

$$x^3 \left(\frac{d^3\,z}{d\,x^3}\right) + 3\,x^2\,y \left(\frac{d^3\,z}{d\,x^2\,d\,y}\right) + 3\,x\,y^2 \left(\frac{d^3\,z}{d\,x\,d\,y^2}\right) + y^3 \left(\frac{d^3\,z}{d\,y^3}\right) = 0.$$

On voit aiſement comment procéder pour les ordres ſupérieurs, & il ne ſera pas difficile d'aſſigner, en ſuivant le même raiſonnement, l'intégrale d'une équation de cette eſpèce d'un ordre quelconque. Nous allons finir ce memoire par montrer l'uſage de l'introduction de nos nouvelles variables dans l'intégration des equations plus compliquees, pour lesquelles il ſera bon de debuter par cette obſervation.

Ob-

Obſervation préliminaire.

M. *Euler* a demontré dans un mémoire qui roule ſur la même matière, que l'intégrale de l'équation

$$n\,V = x\left(\frac{dV}{dx}\right) + y\left(\frac{dV}{dy}\right) \text{ eſt } V = y^n\,\mathfrak{A} : \frac{x}{y},$$

où $\mathfrak{A}$ marque une fonction quelconque. Chès nous il y a

$$x = t\,u,\ y = u,\ \left(\frac{dV}{dx}\right) = \frac{1}{u}\left(\frac{dV}{dt}\right),$$

(par l'équation marquée par $\mathfrak{A}$) &

$$\left(\frac{dV}{dy}\right) = \left(\frac{dV}{du}\right) - \frac{t}{u}\left(\frac{dV}{dt}\right),$$

(par l'équation marquée $\mathfrak{B}$); donc

$$x\left(\frac{dV}{dx}\right) + y\left(\frac{dV}{dy}\right) = u\left(\frac{dV}{du}\right).$$

Ainſi l'intégrale de l'équation $n\,V = u\left(\frac{dV}{du}\right)$ ſera $V = u^n\,\mathfrak{A} : t$, $\mathfrak{A}$ étant une fonction de t.

Problème 1.

Trouver l'intégrale de cette équation différentielle:

$$A\,z + B\,P = 0.$$

Solution.

Soit $V = a\,z$ & nous aurons en vertu du lemme précédent $a\,z = u^n\,\mathfrak{A} : t$ & $n\,V = n\,a\,z$ &

$$u\left(\frac{dV}{du}\right) = a\,u\left(\frac{dz}{du}\right) = n\,v = n\,a\,z.$$

Or $u\left(\frac{dz}{du}\right) = P$, donc $n\,a\,z = a\,P$, ou bien $-n\,a\,z + a\,P = 0$, équation qui, comparée avec la propoſée $A\,z + B\,P = 0$, fournit $a = B$ & $n\,a = -A$, & partant $n = -\frac{A}{B} = \alpha$, d'où l'on tire en ſubſtituant, $B\,z = u^\alpha\,\mathfrak{A} : t$, & en diviſant par B, puisque $\mathfrak{A}$ eſt une fonction arbitraire, on pourra mettre $z = u^\alpha\,\Phi : t$.

Pro-

Problème 2.

Trouver l'intégrale complette de cette équation différentielle du ſecond degré: $Az + BP + CQ = 0$.

Solution.

Mettons $az + bP$ à la place de V du lemme, pour avoir $az + bP = u^n \mathfrak{A} : t$, & puisque

$$nV = naz + nbP \text{ \& } u(\tfrac{dV}{du}) = au(\tfrac{dz}{du}) + bu(\tfrac{dP}{du}),$$

on aura

$$naz + nbP = au(\tfrac{dz}{du}) + bu(\tfrac{dP}{du}),$$

ou bien, à cauſe de

$$u(\tfrac{dz}{du}) = P \text{ \& } u(\tfrac{dP}{du}) = P + Q$$

(corollaire du Problème III.), on aura

$$-naz + (a - (n-1)b)P + bQ = 0.$$

Cette équation comparée avec la propoſée donne

$$b = C;\ a = B + (n-1)C \text{ \& } A = -na = -nB - n(n-1)C$$

ou bien

$$n(n-1)C + nB + A = 0,$$

d'où il faut déterminer la lettre n. Soyent les deux racines de cette équation quarrée $n = \alpha$, $n = \beta$, & les valeurs correſpondantes à a & b: a' & b', en ſubſtituant dans l'équation $az + bP = u^n \mathfrak{A} : t$ on aura

$$az + bP = u^\alpha \mathfrak{A} : t;$$
$$a'z + b'P = u^\beta \mathfrak{B} : t;$$

d'où en éliminant P, à cauſe des fonctions $\mathfrak{A}$ & $\mathfrak{B}$ arbitraires, on tirera une expreſſion pour z de la forme ſuivante: $z = u^\alpha \Phi : t + u^\beta \Phi' : t$.

Pro-

Problème 3.

Trouver l'intégrale de cette équation différentielle du troiſième degré: $Az + BP + CQ + DR = 0$.

Solution.

Soit $V = az + bP + cQ = u^n \mathfrak{A} : t$, & nous aurons

$$naz + nbP + ncQ = au\left(\frac{dz}{du}\right) + bu\left(\frac{dP}{du}\right) + cu\left(\frac{dQ}{du}\right)$$

ou bien

$$-naz + (a - (n-1)b)P + (b - (n-2)c)Q + cR = 0,$$

équation dont la comparaiſon avec la propoſée donne

$$c = D;\ b = C + (n-2)D;\ a = B + (n-1)C + (n-1)(n-2)D\ \&$$

$$n(n-1)(n-2)D + n(n-1)C + nB + A = 0.$$

Soyent les racines de cette équation $n = \alpha$, $n = \beta$, $n = \gamma$, & les valeurs correſpondantes aux a, b, c, ſoyent a', b', c', pour $n = \beta$ & a'', b'', c'', pour $n = \gamma$, nous aurons:

$$az + bP + cQ = u^\alpha \mathfrak{A} : t$$

$$a'z + b'P + c'Q = u^\beta \mathfrak{B} : t$$

$$a''z + b''P + c''Q = u^\gamma \mathfrak{C} : t$$

d'où l'on tire aiſément, après avoir éliminé les P & Q, une expreſſion pour z de cette forme:

$$z = u^\alpha \Phi : t + u^\beta \Phi' : t + u^\gamma \Phi'' : t.$$

On voit aſſés de quelle façon on doit continuer ces opérations pour les équations des degrés ſupérieurs & même en général pour une équation indéfinie

$$Az + BP + CQ + DR + ES + \&c. = 0$$

On trouve au reſte dans le mémoire cité de M. *Euler* des éclairciſſemens touchant les cas, où les racines α, β, γ renferment une ou pluſieures imaginaires, auſſi bien que relativement à ces cas, où deux ou pluſieures de ces racines deviennent égales entre-elles. Dans le premier cas l'intégrale ne pourroit être réelle, dans l'autre cas elle ne ſeroit plus que particuliere, puis-qu'il n'y auroit pas autant de fonctions arbitraires que le nombre des intégrations exige. L'un & l'autre inconvénient peut être redreſſé par les réductions expoſées dans le mémoire cité.

PROBLE-

PROBLEMATIS CVIVSDAM PAPPI ALEXANDRINI CONSTRVCTIO.

Auctore

L. EVLERO.

Theorema.

Si a terminis rectae cuiuscunque A B ad circuli cuiuscunque punctum quoduis P ducantur rectae A P et B P, circulum ſecantes in A et B, tum vero puncta F et G ita capiantur, vt ſit Tab. I. Fig. 1.

$AF = \frac{AP.Aa}{AB}$ et $BG = \frac{BP.Bb}{AB}$,

tum ſemper erit

$FP.Ff = GP.Gg = AF.BG$.

Demonſtratio.

Repraeſentetur poſitio rectae A B cum punctis F et G reſpectu centri illius circuli O, ac ponatur $AO = a$, $BO = b$, radius circuli $Om = On = r$ et $AB = c$; tum vero ſit $FO = f$, $GO = g$, eritque $AP.Aa = An.Am$. Eſt vero $An = a + r$ et $Am = a - r$, ideoque

$AP.Aa = aa - rr$.

 Simili

Simili modo erit

$$BP . Bb = B\nu . B\mu = (b + r)(b - r),$$

ſiue

$$BP . Bb = bb - rr.$$

Eodem modo colligitur fore

$$FP . Ff = ff - rr \text{ et } GP . Gg = gg - rr.$$

Sumtis igitur

$$AF = \frac{aa - rr}{c} \text{ et } BG = \frac{bb - rr}{c},$$

demonſtrandum eſt fore

$$ff - rr = gg - rr = \frac{(aa - rr)(bb - rr)}{cc},$$

quem in finem ſequens Lemma in ſubſidium erit vocandum.

Lemma.

Tab. I. Fig. 2. Si ex trianguli AOB puncto O ad lateris oppoſiti AB punctum datum F ducatur recta OF, erit

$$FO^2 = \frac{AO^2 . BF + BO^2 . AF}{AB} - AF . BF.$$

Demonſtratio.

Demiſſo ex E in AB perpendiculo OΠ erit

$$AO^2 = A\Pi^2 + \Pi O^2 = (AF + F\Pi)^2 + FO^2 - F\Pi^2,$$

ſiue

$$AO^2 = AF^2 + FO^2 + 2 AF . F\Pi;$$

eodemque modo erit

$$BO^2 = BF^2 + FO^2 - 2 BF . F\Pi.$$

Si prior harum aequationum ducta in BF ad alteram in AF ductam addatur, prodibit

AO².

$$AO^2.BF+BO^2.AF=BF(AF^2+FO^2)+AF(BF^2+FO^2)$$

ſiue

$$AO^2.BF+BO^2.AF=FO^2.AB+BF.AF.AB,$$

vnde

$$FO^2=\frac{AO^2.BF+BO^2AF}{AB}-AF.BF. \quad \text{Q. E. D.}$$

Continuatio prioris demonſtrationis.

Ponatur $AF=\frac{aa-rr}{c}=\alpha$, $BG=\frac{bb-rr}{c}=\beta$, eritque Tab. I. Fig. I.

$$aa=\alpha c+rr \text{ et } bb=\beta c+rr.$$

Iam ex Lemmate erit

$$cff=aa(c-\alpha)+bb\alpha-\alpha c(c-\alpha),$$

et ſi loco aa et bb ſubſtituantur valores modo dati, habebitur

$$cff=crr+\alpha\beta c, \text{ ſiue } ff-rr=\alpha\beta.$$

Cum porro ſit

$$GO^2=\frac{BO^2.AF+AO^2.BF}{AB}-AF.BF,$$

eodem modo demonſtratur fore

$$cgg=crr+\alpha\beta c, \text{ ſive } gg-rr=\alpha\beta$$

hincque

$$ff-rr=gg-rr=\frac{(aa-rr)(bb-rr)}{cc}. \quad \text{Q. E. D.}$$

Hinc ſequens formari poteſt

Theorema.

Si ex trianguli ABC puncto O ad baſin AB duae ducantur rectae inter ſe aequales OF et OG, erit $AO^2-AB.AF=BO^2-AB.BG$. Fig. 2.

Demonſtratio.

Demiſſo ex vertice O perpendiculo $O\Pi$, erit

$$F\Pi = G\Pi = \tfrac{1}{2} FG.$$

Cum igitur ſit

$$AO^2 = AF^2 + FO^2 + 2\,AF.F\Pi, \text{ ſiue}$$

$$AO^2 = AF^2 + FO^2 + AF.FG, \text{ erit}$$

$$AO^2 = FO^2 + AF.AG.$$

Simili modo erit $BO^2 = FO^2 + BF.BG$. Ex priore ſit

$$FO^2 = AO^2 - AF.AG, \text{ vnde}$$

$$FO^2 - AF.BG = AO^2 - AB.AF.$$

Ex altera ſit

$$FO^2 = BO^2 - BF.BG, \text{ conſequenter}$$

$$FO^2 - AF.BG = BO^2 - AB.BG,$$

vnde ſequitur

$$AO^2 - AB.AF = BO^2 - AB.BG. \quad \text{Q. E. D.}$$

Corollarium.

Quotius igitur fuerit

$$AO^2 - AB.AF = BO^2 - AB.BG = \Delta,$$

binae rectae FO et GO erunt inter ſe aequales, ſimulque erit $FO^2 - AF.BG = \Delta$. Quod ſi ergo capiatur

$$AF = \frac{AO^2 - \Delta}{AB} \text{ et } BG = \frac{BO^2 - \Delta}{AB}$$

erit $FO = GO$. At in praecedente Theoremate erat

$$AF = \frac{aa - rr}{c} \text{ et } BG = \frac{bb - rr}{c}, \text{ vnde}$$

$$\Delta = rr,\ AF = \frac{AO^2 - rr}{AB},\ BG = \frac{BO^2 - rr}{AB} \text{ et}$$

$$FO^2 - rr = AF.BG.$$

Proble-

Problema.

Circulo dato, centro O deſcripto, triangulum $a\,b\,c$ inſcribere, cuius tria latera $a\,b$, $a\,c$, $b\,c$, producta, per data tria puncta C, B, A, tranſeant. Tab. I. Fig. 3.

Conſtructio.

Sint A, B, C, tria puncta data, quorum diſtantiae a centro circuli O ſint $AO = a$, $BO = b$, $CO = c$, radio circuli exiſtente $= 1$. Iam ex puncto B capiatur interuallum $BF = \frac{bb-1}{AB}$ eritque $FO^2 - 1 = \frac{BF(aa-1)}{AB}$. Tum iuncta recta FC, ſuper ea capiatur interuallum

$$FK = \frac{FO^2 - 1}{FC} = \frac{BF(aa-1)}{AB.FC}, \text{ eritque}$$

$$KO^2 - 1 = \frac{FK(cc-1)}{FC}.$$

Iam ex centro O talis ducatur radius Om, vt ſit coſinus anguli $KOm = \frac{coſ.\,BFC}{KO}$. Tum biſecetur angulus BFC recta FS, cui ex puncto m parallela agatur recta $m\,b$, eritque b unus angulorum trianguli quaeſiti, ad quem ſi ex puncto A ducatur recta AB, ea producta circulum in C ſecabit. Ex hoc puncto C ad B ducatur recta CB circulum ſecans in a; tum vero latus $b\,a$ productum per tertium punctum datum C tranſibit, eritque $a\,b\,c$ triangulum quaeſitum.

Corollarium 1.

Sint duo punctorum datorum A et C infinite diſtantia in rectis ABA, CBC ſe mutuo in B decuſſantibus. Ex B ducatur recta $B\,c\,a$, reſecans a circulo arcum $c\,a$, cui in peripheria inſiſtant anguli, angulo CBA Fig. 4.

aequa-

aequales, tum ductis ex *a* rectis *a b* ipſi C B C, et *b c* ipſi A B A parallelis, erit *a b c* triangulum quaeſitum.

Corollarium 2.

Tab. I. Fig. 5. Cadant omnia tria puncta data ad diſtantias infinitas in rectis O A, O B, O C; tum rectae O A parallela agatur recta *b c* ad diſtantiam a centro O X = coſ. B O C; tum ductis rectis *b a* ipſi O C et *c a* ipſi O B parallelis habebitur triangulum quaeſitum.

Scholion 1.

Ceterum hic probe notandum eſt, conſtructionem ſupra datam duas ſolutiones ſuppeditare, prout angulus K O *m* dextrorſum ſiue ſiniſtrorſum accipitur. Praeterea vero, cum tria puncta A, B, C, inter ſe ſint permutabilia, ſex diuerſis modis conſtructio hic data inſtitui poteſt, qui ergo omnes easdem binas ſolutiones praebere debent, cuius rei tamen nulla ratio patet.

Scholion 2.

Fig. 6. Hoc Problema etiam pro ſphaera reſolui poteſt, ita vt circulo minori in ſphaera deſcripto triangulum ſphaericum *a b c* inſcribi debeat, ita comparatum, vt eius latera producta *a b*, *a c*, *b c*, tranſeant per data tria puncta in ſphaerae ſuperficie, C, B, A. Concipiatur enim planum, ſphaeram in centro circuli O tangens, ſuper quo triangulum planum modo praeſcripto iam ſit conſtructum; eiusque translatio ad ſuperficiem ſphaerae erit facillima, cum omnes anguli circa centrum in ſuperficie tam plani quam ſphaerae ſint iidem, diſtantiae vero punctorum datorum A, B, C et angulorum trianguli *a*, *b*, *c* a centro O in tangentes abeant.

SOLV-

SOLVTIO.
PROBLEMATIS GEOMETRICI
PAPPI ALEXANDRINI.

Auctore
NICOLAO FUSS.

Problematis geometrici, cuius conſtructionem Ill. *Eulerus* in diſſertatione praecedente tradidit, caſus ſimplicior occurrit in *Collectionum Mathematicarum Pappi Alexandrini Libro VII*, vbi Problema ita proponitur: " Circulo A B C, " poſitione dato; et datis tribus punctis D, E, F, in li-" nea recta, inflectere D A E, et facere B C in directum " ipſi C F ". Huius Problematis conſtructio, ipſius *Pappi* eiusue Commentatoris *Commendini* verbis expreſſa, ita ſe habet: " Sit circulus A B C, data autem in recta linea " tria puncta D E F. Et quadrato eius lineae, quae a " puncto E ducta circulum contingit aequale ponatur rect-" angulum D E H, et datis duobus punctis H F, ab ipſis " in circulum inflectatur H C F, ita vt B G parallela ſit " ſit H F, iunctaque E C ad A producatur. Dico rectam Tab. II. Fig. 1.

" lineam eſſe quae per A E D tranſit. Quoniam vnum-
" quodque rectangulorum A E C, D E H aequale eſt qua-
" drato lineae a puncto E contingentis, erit rectangulum
" A E C aequale rectangulo D E H. In circulo igitur
" ſunt puncta D H C A. Et quoniam angulus B G C an-
" gulo C H F eſt aequalis, angulus autem B G C aequalis
" angulo B A C in circulo, erit angulus B A C aequalis
" ipſi C H E: et ſunt in circulo A C H D puncta, ergo
" A B in eadem recta linea conſtituitur in qua eſt B C."

Problema hoc Solutioni prioris latius patentis anſam praebuit, cuius conſtructionem antequam aggrediamur, *Pappi* caſum ſimpliciorem more noſtro conſtruxiſſe iuuabit, quem in finem ſequens Problema praemittamus.

Problema 1.

Tab. II. Fig. 2. *Dato circulo, centro* O, *radio* O M *deſcripto, datisque tribus punctis* D, E, F, *in directum iacentibus, circulo triangulum* A B C *inſcribere, cuius latera, producta ſi opus eſt, per terna illa puncta tranſeant.*

Conſtructio.

Iungantur puncta D, E, F, recta D F, et cum data ſint interualla D E, E O, vna cum radio circuli M O, ſuper recta D E capiatur interuallum $EH = \frac{EO^2 - MO^2}{DE}$, ductaque recta H O ſuper eadem recta D E ſumatur interuallum $HK = \frac{HO^2 - MO^2}{HF}$. Iam ex puncto K ducatur recta K G circulum tangens in puncto G, et ex G agatur

tur rectae D F parallela G B; tum recta D B producta dabit punctum A, ex quo ſi ducatur recta A E circulum in C ſecans, recta B C producta per punctum F tranſibit, eritque A B C triangulum quaeſitum.

Scholion.

Veritas huius conſtructionis, ingenioſiſſimae *Pappi* Solutioni ſimilis, ex demonſtratione conſtructionis Problematis ſequentis generalioris patebit, vbi tria puncta data D, E, F, non in directum, ſed vtcunque ſita aſſumuntur, quippe ad quem caſum praecedentis conſtructionis momenta etiam applicari poterunt.

Problema 2.

Dato circulo, centro O, *radio* O M *deſcripto, datisque tribus punctis* D, E, F, *vtcunque ſitis, inſcribere circulo triangulum* A B C, *ita comparatum, vt eius latera, ſi opus eſt producta, per data tria puncta tranſeant.* Tab. II. Fig. 3.

Conſtructio.

Iungantur puncta D, E, O, rectis D O, E O, quippe quae datae ſunt, vna cum radio circuli M O. Capiatur in recta D E interuallum $EH = \frac{EO^2 - MO^2}{DE}$. Ex H ad tertium punctum inter datos F ducatur recta H F, ſuper qua capiatur interuallum $HK = \frac{HO^2 - MO^2}{HF}$. Super eadem recta H F ſumatur interuallum H R = M O, et demiſſo ex R in D E perpendiculo R S, centro O, radio

dio H S deſcribatur circulus dato concentricus. Quo facto ex K agatur recta K G, circulum minorum tangens in T, maiorem vero ſecans in G et I. Tum ex G agatur recta G B parallela rectae D E, ductisque rectis D B et F B, circulum, priori producta, ſecantibus in A et C, recta A C producta per punctum E tranſibit, eritque A B C triangulum quaeſitum.

Demonſtratio.

Tab. III. Fig. 1. Sit A B C triangulum quaeſitum, cuius terna latera A B, A C, B C, producta, per data tria puncta D, E, F tranſeant. Ex B rectae D E paralella agatur recta B G, atque ex G per punctum C ducatur recta G H, rectae D E occurrens in H. Ducta porro recta H F, ei normaliter agatur B I, atque ex G per I ducatur G K, rectae H F occurrens in K; et nunc demonſtrandum eſt fore

$$1^\circ).\ EH = \frac{EO^2 - MO^2}{DE};\quad 2^\circ).\ HK = \frac{HO^2 - MO^2}{HF}.$$

Primo erit angulus E H C = B G C, tum vero B G C = B A F, quia eidem arcui inſiſtunt. Triangula igitur E C H et E D A, ob angulos E H C et E A D aequales, et communem angulum ad E, erunt ſimilia, vnde colligitur fore

$$EC : EH = ED : EA,$$

conſequenter erit

$$EC.\ EA = ED.\ EH.$$

Ducta autem ex E per centrum O recta E m, circulum ſecans in M et m, erit

$$EC.EA = EM.Em = (EO - MO)(EO + MO),$$

ergo

ergo

$$EC.EA = ED.EH = EO^2 - MO^2,$$

ideoque

$$EH = \frac{EO^2 - MO^2}{DE}.$$

Quod erat vnum.

Porro erunt anguli H F C et I B C aequales; I B C vero aequalis eſt angulo eidem arcui inſiſtenti I G C. Triangula igitur H F C et H G K, angulum communem ad H anguloſque H F C, H G K aequales habentia, ſunt ſimilia; conſequenter erit

$$HC : HF = HK : HG,$$

vnde fit

$$HF.HK = HC.HG.$$

At ducta ex H per centrum O recta $HM'Om'$ fiet

$$HC.HG = HM'.Hm' = (HO - MO)(HO + MO)$$

ideoque

$$HF.HK = HO^2 - MO^2;$$

vnde prodit

$$HK = \frac{HO^2 - MO^2}{HF}.$$

Quod erat alterum.

Hic quidem ſuppoſuimus eſſe vi noſtrae Conſtructionis rectam B I rectae H F parallelam. Hoc reuera fieri ſequenti modo oſtenditur: Cum in conſtructione ſumſerimus interuallum H R radio circuli dati O M aequale, ductaque normali R S circulus minor deſcriptus ſit radio O T = H S, erit T I = R S, ideoque angulus

$$EHR = TOI = GBI,$$

 con-

conſequenter, quoniam recta B G parallela eſt rectae D E, per conſtructionem, recta B I etiam ipſi H F parallela ſit neceſſe eſt. Q. E. D.

Corollarium 1.

Si punctum E intra circulum cadat, ita vt habeatur $EO < MO$, erit $\frac{EO^2 - MO^2}{DE}$ quantitas negatiua; vnde patet, hoc caſu interuallum E H, quod in conſtructione a puncto E verſus D erat ſumtum, in ſenſum contrarium ſuper recta D E producta ſumi debere.

Corollarium 2.

Si punctum H intra circulum cadat, id quod euenire poteſt, ſi vnum alterumue punctorum D & E in circulo fuerit ſitum, vel etiam, ſi recta D E tantum circulum ſecet et portio eius intra circulum cadat; tum, ob $HO < MO$, ideoque quantitatem $\frac{HO^2 - MO^2}{FH}$ negatiuam, punctum K, quod in conſtructione noſtra a H verſus F erat ſumtum, nunc in contrariam plagam cadit & interuallum H K ſuper recta F H producta ſumendum erit.

Scholion 1.

Tab III. Fig. 2. Semper autem duas inflectere licet rectas K T, quae circulum minorem tangant, altera in T, quemadmodum ſupra eſt factum, altera ex parte oppoſita in T′; vnde duo triangula naſcuntur plane inter ſe diuerſa, quorum terna latera per data tria puncta tranſibunt. Determinato enim puncto K, vti ſupra docuimus, & deſcripto, ſecundum conſtructionis praecepta, circulo minore concentrico, primo ex K agatur

agatur recta K G, minorem circulum tangens in T, maiorem vero ſecans in I & G; tum ex ſuperiore interſectionis puncto G rectae D E parallela agatur G B, ductisque B A verſus D, B C verſus F, A C punctum E verſus, habebitur triangulum quaeſitum prius. Iam iterum ex K agatur recta K I′ circulum minorem ex altera parte tangens in T′, maiorem vero ſecans in G′ et I′; nunc vero ex inferiore interſectionis puncto G′ rectae D E vel G B parallela agatur G′ B′, & recta D B′ dabit punctum A′, recta E A′, producta, dabit punctum C′, & C′ B′ producta per tertium punctum F tranſibit, eritque A′ C′ B′ alterum triangulum quaeſito ſatisfaciens et a priori plane diuerſum.

Scholion 2.

Eodem quo hic puncta D et E tractauimus modo operationes etiam reſpectu punctorum D et F, vel E et F inſtitui poterunt; vnde tres conſtructiones oriuntur, quarum quaelibet duas praebet Solutiones. Tum vero, quemadmodum hic punctum E pro termino a quo in determinatione puncti H fuerat aſſumtum, ita etiam punctum D pro hoc termino uſurpari poterit. Eodem modo res ſe habet reſpectu punctorum E et F, et D et F, quorum quodlibet pro termino a quo in determinatione puncti H ſumi poteſt. Verum omnes duodecim conſtructiones hoc modo oriundae non niſi binas illas Solutiones, de quibus ſupra locuti ſumus, producunt, quemadmodum tentanti vel ex conſtructione pro quouis caſu inſtituta, vel ex analytica Problematis noſtri tractatione patebit. Problema enim eſt planum, eiusque Solutio analytica ad aequationem

ſecun-

ſecundi gradus perducit, ex qua, duas tantum Solutiones locum habere, manifeſtum eſt.

Geometricam huius veritatis demonſtrationem completam dedit Cel. *Caſtillon* in Actorum Academiae Regiae Boruſſicae Tomo pro Anno 1776.

PHYSI-

PHYSICO-
MATHEMATICA.

DE MOTV LIBERO
PLVRIVM CORPORVM FILIS COLLIGATORVM SVPER PLANO HORIZONTALI.

Auctore

L. EVLERO.

Problema 1.

§. 1.

Si duo corpora A *et* B, *filo* $AB = a$ *colligata, ſuper plano horizontali vtcunque proiiciantur, eorum motum determinare.* Tab. IV. Fig. 1.

Solutio.

Elapſo tempore t habeant corpora ſitum in figura repraeſentatum, et pro vtroque ponantur coordinatae

$$OP = x,\ PA = y \text{ et } OQ = x' \text{ et } QB = y';$$

porro ponatur angulus $BAp = p$, eritque

$$Ap = a\,\text{coſ.}\,p \text{ et } Bp = a\,\text{ſin.}\,p,$$

vnde fit

$$x' = x + a\,\text{coſ.}\,p \text{ et } y' = y + a\,\text{ſin.}\,p.$$

 Iam

Iam ſit tenſio fili A B $=$ P, qua corpus A ſecundum directiones ſuarum coordinatarum protrahitur viribus P coſ. p et P ſin. p; corpus vero B iisdem viribus retrahitur; vnde principia motus ſequentes praebent aequationes:

I. $\frac{A\,ddx}{2g\,dt^2} = P\cos. p$;

II. $\frac{A\,ddy}{2g\,dt^2} = P\sin. p$;

III. $\frac{B\,ddx'}{2g\,dt^2} = -P\cos. p$;

IV. $\frac{B\,ddy'}{2g\,dt^2} = -P\sin. p$.

Hinc iam ſtatim prima ac tertia additae dant

$$A\,ddx + B\,ddx' = 0$$

et ſecunda et quarta dat

$$A\,ddy + B\,ddy' = 0;$$

ex quibus integratis colligitur

$$A\,x + B\,x' = \alpha t + \beta;$$
$$A\,y + B\,y' = \gamma t + \delta.$$

Hinc cognoſcimus, ambo corpora ita moueri, vt eorum commune centrum grauitatis in linea recta vniformiter progrediatur. Quod ſi nunc toto ſpatio aequalem motum in directionem contrariam mente imprimamus, centrum grauitatis in quiete manebit, quod ergo ponamus eſſe in ipſo puncto O, ac pro hoc caſu motum corporum inueſtigemus, quo inuento, centro grauitatis iterum motus vniformis rectilineus, quem dempſimus, imprimatur, et prodibit verus motus amborum corporum, hocque modo obtinebimus vt fiat:

$$A\,x + B\,x' = 0 \text{ et } A\,y + B\,y' = 0.$$

Cum igitur ſit

$$x' = x + a\cos. p \text{ et } y' = y + a\sin. p;$$

hinc

hinc fiet

$$(A+B)x + Ba\,\text{coſ.}\,p = 0 \text{ et } (A+B)y + Ba\,\text{ſin.}\,p$$

vnde porro colligitur

$$(A+B)^2(xx+yy) = BBaa, \text{ ideoque}$$

$$\sqrt{(xx+yy)} = \frac{Ba}{A+B},$$

vbi $\sqrt{(xx+yy)}$ denotat diſtantiam corporis A a centro O, quae ergo manet conſtans, perinde ac diſtantia alterius corporis B ab O. Sit igitur A O B ſitus amborum corporum poſt tempus $= t$, eritque A O B linea recta $= a$, ac diſtantiae Tab. IV. Fig. 2.

$$AO = \frac{Ba}{A+B} \text{ et } BO = \frac{Aa}{A+B}.$$

Supereſt ergo tantum vt angulus A O P vel B O Q, quem filum A B cum axe conſtituit, definiatur; hic vero angulus cum ſit p, ex aequationibus prima et ſecunda definiri poteſt, vnde fit:

$$A\,ddx\,\text{ſin.}\,p - A\,ddy\,\text{coſ.}\,p = 0, \text{ ſiue}$$

$$ddx\,\text{ſin.}\,p - ddy\,\text{coſ.}\,p = 0.$$

Quare, cum ex ſupra inuentis ſit

$$x = -\frac{Ba\,\text{coſ.}\,p}{A+B} \text{ et } y = -\frac{Ba\,\text{ſin.}\,p}{A+B},$$

his valoribus ſubſtitutis fiet

$$-\text{ſin.}\,p.\,dd.\,\text{coſ.}\,p + \text{coſ.}\,p.\,dd.\,\text{ſin.}\,p = 0.$$

Eſt vero:

$$dd.\,\text{coſ.}\,p = -ddp\,\text{ſin.}\,p - dp^2\,\text{coſ.}\,p \text{ et}$$

$$dd.\,\text{ſin.}\,p = ddp\,\text{coſ.}\,p - dp^2\,\text{ſin.}\,p,$$

vnde fit $ddp = 0$, ſicque adipiſcimur $p = \alpha t + \beta$; vnde diſcimus, celeritatem angularem fili A B, quae eſt $\frac{dp}{dt} = \alpha$, eſſe conſtantem, quocirca ſolutio noſtri problematis ita ſe habet: Quomodocunque noſtra corpora filo A B colligata

proiiciantur, eorum motus ita erit comparatus, vt eorum commune centrum grauitatis g vniformiter in directum progrediatur, interea vero ambo corpora circa hoc ipſum punctum g vniformiter gyrentur, prouti ſcilicet motus primo impreſſus poſtulat.

Problema 2.

Tab. IV. Fig. 3. §. 2. *Si tria corpora* A, B, C, *filis* $AB = a$ *et* $BC = b$ *connexa, vtcunque ſuper plano horizontali proiiciantur, eorum motum inueſtigare.*

Solutio.

Ponantur pro ſingulis corporibus coordinatae

$OP = x$, $PA = y$; $OQ = x'$, $QB = y'$;

$OR = x''$, $RC = y''$;

tum vero inclinatio filorum, ſcilicet anguli $BAp = p$ et $CBq = q$, hincque ſtatim fit

$$x' = x + a\,\text{coſ.}\,p; \quad x'' = x + a\,\text{coſ.}\,p + b\,\text{coſ.}\,q$$
$$y' = y + a\,\text{ſin.}\,p \quad\quad y'' = y + a\,\text{ſin.}\,p + b\,\text{ſin.}\,q.$$

Porro denotet P tenſionem fili AB et Q tenſionem fili BC, ex quibus oriuntur ſequentes aequationes:

I. $\frac{A\,ddx}{2g\,dt^2} = P\,\text{coſ.}\,p;$

II. $\frac{A\,ddy}{2g\,dt^2} = P\,\text{ſin.}\,p;$

III. $\frac{B\,ddx'}{2g\,dt^2} = -P\,\text{coſ.}\,p + Q\,\text{coſ.}\,q;$

IV. $\frac{B\,ddy'}{2g\,dt^2} = -P\,\text{ſin.}\,p + Q\,\text{ſin.}\,q;$

V. $\frac{C\,ddx''}{2g\,dt^2} = -Q\,\text{coſ.}\,q;$

VI. $\frac{C\,ddy''}{2g\,dt^2} = -Q\,\text{ſin.}\,q;$

qua-

quarum prima, tertia et quinta additae manifeſto praebent

$$A\,ddx + B\,ddx' + C\,ddx'' = 0;$$

ſimilique modo II. IV et VI additae praebent

$$A\,ddy + B\,ddy' + C\,ddy'' = 0;$$

quibus vt ante motus aequabilis rectilineus centri gravitatis communis indicabitur, qui motus cum iam vt cognitus ſpectari poſſit, centrum grauitatis quaſi in O fixum iam concipiamus, hincque habebimus has aequationes:

$$A\,x + B\,x' + C\,x'' = 0 \text{ et } A\,y + B\,y' + C\,y'' = 0,$$

hincque porro colligimus ſequentes aequationes:

$$(A+B+C)x + (B+C)a\,\text{coſ}.\,p + C\,b\,\text{coſ}.\,q = 0 \text{ et}$$
$$(A+B+C)y + (B+C)a\,\text{ſin}.\,p + C\,b\,\text{ſin}.\,q = 0$$

vnde ipſae coordinatae ſequenti modo exprimentur:

$$x = \frac{-(B+C)a\,\text{coſ}.\,p - C\,b\,\text{coſ}.\,q}{A+B+C};\quad y = \frac{-(B+C)a\,\text{ſin}.\,p - C\,b\,\text{ſin}.\,q}{A+B+C}$$
$$x' = \frac{A\,a\,\text{coſ}.\,p - C\,b\,\text{coſ}.\,q}{A+B+C};\quad y' = \frac{A\,a\,\text{ſin}.\,p - C\,b\,\text{ſin}.\,q}{A+B+C}$$
$$x'' = \frac{A\,a\,\text{coſ}.\,p + (A+B)b\,\text{coſ}.\,q}{A+B+C};\quad y'' = \frac{A\,a\,\text{ſin}.\,p + (A+B)b\,\text{ſin}.\,q}{A+B+C}$$

Nunc igitur ſupereſt vt bini anguli p et q definiantur. Hunc in finem ex aequationum I et II eliminemus tenſionem P, vnde fit $ddx\,\text{ſin}.\,p - ddy\,\text{coſ}.\,p = 0$; ſimilique modo ex V et VI, eliminando tenſionem Q, habebimus

$$ddx''\,\text{ſin}.\,q - ddy''\,\text{coſ}.\,q = 0;$$

quarum prior, reſtitutis valoribus, abit in ſequentem:

$$\left.\begin{array}{l} +(B+C)a(\text{coſ}.\,p.\,dd.\,\text{ſin}.\,p - \text{ſin}.\,p.\,dd.\,\text{coſ}.\,p) \\ +C\,b\,(\text{coſ}.\,p.\,dd.\,\text{ſin}.\,q - \text{ſin}.\,p.\,dd.\,\text{coſ}.\,q) \end{array}\right\} = 0$$

poſterior vero eodem modo tractata praebet

+ (A-

$$\left.\begin{array}{l} + (A+B)\,b\,(\text{ſin.}\,q.\,d\,d.\,\text{coſ.}\,q - \text{coſ.}\,q.\,d\,d.\,\text{ſin.}\,q) \\ + A\,a\,(\text{ſin.}\,q.\,d\,d.\,\text{coſ.}\,p - \text{coſ.}\,q.\,d\,d.\,\text{ſin.}\,p) \end{array}\right\} = 0.$$

Ad has aequationes reſoluendas notemus eſſe:

$$\text{coſ.}\,p.\,d\,d.\,\text{ſin.}\,p - \text{ſin.}\,p.\,d\,d.\,\text{coſ.}\,p = d\,d\,p$$

$$\text{coſ.}\,p.\,d\,d.\,\text{ſin.}\,q - \text{ſin.}\,p.\,d\,d.\,\text{coſ.}\,q = d\,d\,q\,\text{coſ.}\,(q-p) - d\,q^2\,\text{ſin.}\,(q-p)$$

$$\text{ſin.}\,q.\,d\,d.\,\text{coſ.}\,q - \text{coſ.}\,q.\,d\,d.\,\text{ſin.}\,q = - d\,d\,q$$

$$\text{ſin.}\,q\,d\,d.\,\text{coſ.}\,p - \text{coſ.}\,q.\,d\,d.\,\text{ſin.}\,p = - d\,d\,p\,\text{coſ.}\,(q-p) - d\,p^2\,\text{ſin.}\,(q-p).$$

Hi ergo valores in ſuperioribus aequationibus ſubſtituti praebent iſtas:

$$(B+C)\,a\,d\,d\,p + C\,b\,(d\,d\,q\,\text{coſ.}\,(q-p) - d\,q^2\,\text{ſin.}\,(q-p)) = 0$$

et

$$-(A+B)\,b\,d\,d\,q - A\,a\,(d\,d\,p\,\text{coſ.}\,(q-p) + d\,p^2\,\text{ſin}\,(q-p)) = 0.$$

Ponamus

$$\frac{(B+C)\,a}{C\,b} = m \quad \text{et} \quad \frac{(A+B)\,b}{A\,a} = n,$$

vt habeamus has duas aequationes:

$$1^\circ.\; m\,d\,d\,p + d\,d\,q\,\text{coſ.}\,(q-p) - d\,q^2\,\text{ſin.}\,(q-p) = 0$$

$$2^\circ.\; n\,d\,d\,q + d\,d\,p\,\text{coſ.}\,(q-p) + d\,p^2\,\text{ſin.}\,(q-p) = 0$$

ex quibus ambos angulos incognitos p et q elicere oportet, id quod ſequenti modo ſuccedet.

Integrentur hae duae aequationes, quod fieri licet more ſolito, ac reperietur:

$$m\,d\,p + d\,q\,\text{coſ.}\,(q-p) - \int d\,p\,d\,q\,\text{ſin.}\,(q-p) = \text{conſt.}$$

$$n\,d\,q + d\,p\,\text{coſ.}\,(q-p) + \int d\,p\,d\,q\,\text{ſin.}\,(q-p) = \text{conſt.}$$

vnde patet, ſummam harum formularum a formulis integralibus fore liberam, ita vt hinc adipiſcamur hanc aequa-

quationem integratam:

$$3^{\circ}.\ m\,dp + n\,dq + (dp + dq)\,\text{coſ.}\,(q-p) = \tfrac{1}{2}\alpha\,dt.$$

Deinde vero iſta combinatio: $1^a.\ dp + 2^a.\ dq$ fit integrabilis et praebet hanc aequationem:

$$\tfrac{1}{2} m\,dp^2 + \tfrac{1}{2} n\,dq^2 + dp\,dq\,\text{coſ.}\,(q-p) = \tfrac{1}{8}\beta\,dt^2,$$

ita vt nunc loco binarum aequationum differentialium ſecundi gradus habeamus ſequentes duas aequationes tantum primi gradus:

$$\text{I.}\ \ 2m\,dp + 2n\,dq + 2(dp + dq)\,\text{coſ.}\,(q-p) = \alpha\,dt;$$

$$\text{II.}\ \ 4m\,dp^2 + 4n\,dq^2 + 4\,dp\,dq\,\text{coſ.}\,(q-p) = \beta\,dt^2;$$

quarum tamen vlterior reſolutio non parum dexteritatis poſtulat. Sequenti autem modo negotium expediri poterit.

Faciamus ſcilicet ſequentes ſubſtitutiones: Primo fiat $q - p = \Phi$, vt ſit $dq - dp = d\Phi$; ac ponamus porro

$$dp = \left(\tfrac{u-1}{2}\right) d\Phi \ \text{ et } \ dq = \left(\tfrac{u+1}{2}\right) d\Phi;$$

denique vero etiam ponatur $dt = \theta\,d\Phi$, vt omnia elementa ad idem differentiale $d\Phi$ reducamus, hocque modo noſtrae aequationes induent formas ſequentes:

$$\text{I.}\ \ (m+n)\,u + n - m + 2u\,\text{coſ.}\,\Phi = \alpha\,\theta$$

$$\text{II.}\ \ (m+n)\,uu + 2(n-m)\,u + m + n + 2(uu-1)\,\text{coſ.}\,\Phi = \beta\,\theta\,\theta$$

ex quarum priore colligitur $u = \frac{\alpha\theta + m - n}{m + n + 2\,\text{coſ.}\,\Phi}$.

Iam cum aequatio altera ſit

$$uu(m+n+2\,\text{coſ.}\,\Phi) + 2u(n-m) + m + n - 2\,\text{coſ.}\,\Phi = \beta\,\theta\,\theta,$$

in hac loco u valor modo inuentus ſubſtituatur et prodibit

$$\beta\,\theta^2 = \frac{\alpha\alpha\theta\theta - 2(n-m)\alpha\theta + (n-m)^2}{m+n+2\,\mathrm{coſ.}\,\Phi} + \frac{2(n-m)\alpha\theta - 2(n-m)^2}{m+n+2\,\mathrm{coſ.}\,\Phi}$$
$$+ m + n - 2\,\mathrm{coſ.}\,\Phi\,,$$

quae porro reducitur ad hanc formam:

$$\alpha\alpha\theta\theta + 4mn - 4\,\mathrm{coſ.}\,\Phi^2 = \beta\theta\theta(m+n+2\,\mathrm{coſ.}\,\Phi),$$

ex qua aequatione commode elicitur

$$\theta\theta = \frac{4(mn - \mathrm{coſ.}\,\Phi^2)}{\beta(m+n+2\,\mathrm{coſ.}\,\Phi) - \alpha\alpha},$$ ita vt ſit

$$\theta = \frac{2\sqrt{(mn - \mathrm{coſ.}\,\Phi^2)}}{\sqrt{(\beta(m+n+2\,\mathrm{coſ.}\,\Phi) - \alpha\alpha)}}.$$

Quia ergo poſuimus $dt = \theta\,d\Phi$, erit

$$dt = \frac{2\,d\Phi\sqrt{(mn - \mathrm{coſ.}\,\Phi^2}}{\sqrt{(\beta(m+n+2\,\mathrm{coſ.}\,\Phi) - \alpha\alpha)}}.$$

Sicque iam habemus relationem inter tempus t et angulum Φ, ita vt inde ad quoduis tempus angulus Φ definiri poſſit.

Quodſi iam loco θ hunc valorem ſubſtituamus, nanciſcemur pro u iſtam formulam:

$$u = \frac{(n-m)}{m+n+2\,\mathrm{coſ.}\,\Phi} + \frac{2\alpha\sqrt{(mn - \mathrm{coſ.}\,\Phi^2)}}{m+n+2\,\mathrm{coſ.}\,\Phi\sqrt{(\beta(m+n+2\,\mathrm{coſ.}\,\Phi) - \alpha\alpha)}},$$

ita vt hic u per ſolum angulum Φ definiatur. Hinc ergo quaeratur integrale $\int u\,d\Phi$, quo inuento innoteſcent ambo anguli p et q: erit enim

$$p = \tfrac{1}{2}\int u\,d\Phi - \tfrac{1}{2}\Phi \text{ et } q = \tfrac{1}{2}\int u\,d\Phi + \tfrac{1}{2}\Phi,$$

vbi integrale $\int u\,d\Phi$ nouam quantitatem conſtantem includit, quemadmodum etiam $t\int\theta\,d\Phi$ conſtantem arbitrariam complectitur, ita vt cum literis α et β omnino quatuor conſtantes arbitrariae in noſtra ſolutione contineantur, prorſus vt integratio completa poſtulat. Statim enim deducti ſumus ad ſex aequationes differentiales, quarum duae autem inſeruiebant vtrique tenſioni P et Q definiendis, ita vt tantum quatuor ipſam ſolutionem contineant; at

at vero duae aequationes integrales initio ſtatim inuentae

$$A\,x + B\,x' + C\,x'' = \mathfrak{A}\,t + \mathfrak{B} \text{ et}$$
$$A\,y + B\,y' + C\,y'' = \mathfrak{C}\,t + \mathfrak{D}$$

iam continebant quatuor conſtantes arbitrarias, etiamſi eas nihilo aequales aſſumſimus, vt commune centrum gravitatis ad quietem redigeremus; vnde patet, per quatuor illas conſtantes nunc introductas ſolutionem completam reddi.

Quod autem ad iſtas conſtantes attinet, manifeſtum eſt conſtantem β neque euaneſcentem neque negatiuam accipi poſſe, quia aliquoquin formula pro tempore fieret imaginaria; quin etiam ſemper eſſe debet

$$\beta > \frac{\alpha\alpha}{m + n + 2\,\text{coſ.}\,\Phi};$$

ac ſi angulus Φ vsque ad 180° augeri poſſit, tum eſſe oportet $\beta > \frac{\alpha\alpha}{m + n - 1}$. Circa quantitates autem m et n notaſſe iuuabit eſſe $m\,n = \frac{(A + B)(B + C)}{A\,C}$, quae quantitas ſemper vnitate maior eſt, niſi fuerit $B = 0$, qui autem caſus ad problema prius reuolueretur; tum vero erit

$$m + n = \frac{a\,a\,A\,(B + C) + b\,b\,C\,(A + B)}{A\,C\,a\,b},$$

quae quantitas in infinitum augeri poteſt, ſi fiat vel $a = 0$ vel $b = 0$, minima autem euadet caſu quo $\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{C\,(A + B)}{A\,(B + C)}}$, tum autem eius valor minimus erit $= 2\sqrt{\frac{(A + B)(B + C)}{A\,C}}$, qui ergo ſemper binario eſt maior.

At ſi ſumere velimus tam $\alpha = 0$ quam $\beta = 0$, peculiarem hic caſus euolutionem poſtulat, cum inde ſit $4\,m\,n - 4\,\text{coſ.}\,\Phi^2 = 0$; inde enim fit $m\,n = \text{coſ.}\,\Phi^2$, quod

 autem

autem ob $mn > 1$ nunquam fieri poteſt, niſi ſit $B = 0$, hoc eſt niſi corpus B abſit, quo caſu fieret $\Phi = 0$ vel $\Phi = 180°$, hincque $u = \frac{m - n}{m + n \pm 2}$; foret autem $m + n > 2$. Hoc igitur caſu nullus plane motus ſequeretur, ſed omnia tria corpora in ſtatu quietis perpetuo perſeuerarent.

Poſtquam autem motum trium corporum A, B, C feliciter determinare nobis contigit, operae quoque pretium erit tenſionem vtriusque fili inueſtigare, quam ex ipſis primis aequationibus elici oportet, vbi

$$\text{I. } \cos. p + \text{II. } \sin. p \text{ dat } P = \frac{A(ddx \cos. p + ddy \sin. p)}{2g\,dt^2}.$$

Cum igitur ſit

$$x = \frac{-(B + C)\,a \cos. p - C\,b \cos. q}{A + B + C} \text{ et}$$

$$y = \frac{-(B + C)\,a \sin. p - C\,b \sin. q}{A + B + C}$$

erit pro tenſione

$$\frac{P}{A} = \frac{-a(B+C)(\cos. p .\, dd \cos. p + \sin. p\, dd. \sin. p) - b\,C(\cos. q .\, dd. \cos. p + \sin. q\, dd. \sin. p)}{(A + B + C)\,2g\,dt^2}$$

quae aequatio euoluta praebet

$$\frac{P}{A} = \frac{a(B + C)\,dp^2 - b\,C(ddp \sin.(q - p) - dp^2 \cos.(q - p))}{(A + B + C)\,2g\,dt^2}.$$

Statuamus vt ſupra breuitatis gratia $\frac{(B + C)\,a}{C\,b} = m$, fietque

$$\frac{P}{ACb} = \frac{m\,dp^2 - ddp \sin.(q - p) + dp^2 \cos.(q - p)}{(A + B + C)\,2g\,dt^2}.$$

Vtamur hic porro ſuperioribus valoribus introductis ſcil. $q - p = \Phi$, $dp = \frac{1}{2}(u - 1)\,d\Phi$, $dq = \frac{1}{2}(u + 1)\,d\Phi$, et $dt = \theta\,d\Phi$, eritque $\frac{dp}{dt} = \frac{u - 1}{2\theta}$, hinc $\frac{ddp}{dt} = \frac{1}{2}\,d.\frac{u - 1}{\theta}$ et

$$\frac{ddp}{dt^2} = \frac{1}{2\theta\,d\Phi}\,d.\frac{u - 1}{\theta},$$

quibus valoribus ſubſtitutis habebimus:

$$\frac{P}{ACb} = \frac{m(u-1)^2 - \frac{2\theta}{d\Phi} d.\frac{u-1}{\theta} \text{ſin.}\,\Phi + (u-1)^2 \text{coſ.}\,\Phi}{8g\theta\theta(A+B+C)}$$

vnde tenſio quaeſita erit:

$$P = \frac{bAC}{8g(A+B+C)\theta\theta}\left(m(u-1)^2 - \frac{2\theta}{d\Phi} d.\frac{u-1}{\theta} \text{ſin.}\,\Phi + (u-1)^2 \text{coſ.}\,\Phi\right)$$

vbi, quia literas u et θ per angulum Φ determinauimus, tota haec expreſſio ad quantitates finitas reducetur. Eodem autem modo etiam altera tenſio Q definiri poterit, neque vero opus erit has ſubſtitutiones actu euoluere, cum inde nullae formulae concinnae expectari queant.

Caſus ſpecialioris euolutio.

§. 3. Illuſtremus ſolutionem noſtri Problematis caſu ſimpliciſſimo, quo tria corpora A, B, C ſunt inter ſe aequalia; tum vero ſint etiam ambo fila A et B eiusdem longitudinis, ac primo pro ſingulis coordinatis habebimus ſequentes valores:

$$x = -\tfrac{1}{3}a(2\,\text{coſ.}\,p + \text{coſ.}\,q);\quad y = -\tfrac{1}{3}a(2\,\text{ſin.}\,p + \text{ſin.}\,q);$$
$$x' = \tfrac{1}{3}a(\text{coſ.}\,p - \text{coſ.}\,q);\quad y' = \tfrac{1}{3}a(\text{ſin.}\,p - \text{ſin.}\,q);$$
$$x'' = \tfrac{1}{3}a(\text{coſ.}\,p + 2\,\text{coſ.}\,q);\quad y'' = \tfrac{1}{3}a(\text{ſin.}\,p + 2\,\text{ſin.}\,q);$$

vnde vtique ſequitur fore

$$x + x' + x'' = 0 \text{ et } y + y' + y'' = 0,$$

quemadmodum ſcilicet hypotheſis noſtra poſtulat, qua commune centrum grauitatis trium corporum in puncto O ad quietem reduximus, ita vt tota determinatio ad ambos angulos p et q ſit perducta; pro quibus inueniendis, ob numeros $n = m = 2$, ſolutio generalis ſupra data ita omnia ad angulum Φ accommodat, vt ſit

$$1^\circ.\quad dt = \frac{2\,d\Phi\sqrt{(4 - \text{coſ.}\,\Phi^2)}}{\sqrt{(\beta(4 + 2\,\text{coſ.}\,\Phi) - \alpha\alpha)}};$$

 tum

tum vero, ſumto

$$u = \frac{\alpha \surd (4 - cos. \Phi^2)}{1 + cos. \Phi \surd (3 (4 + 2 cos. \Phi) - \alpha \alpha)}$$

ex hoc valore nanciſcimur:

$$p = \tfrac{1}{2} \int u \, d\Phi - \tfrac{1}{2} \Phi \text{ et } q = \tfrac{1}{2} \int u \, d\Phi + \tfrac{1}{2} \Phi.$$

§. 4. Quod ſi eadem methodo motum plurium corporum, filis connexorum inueſtigare velimus, nullum eſt dubium, quin ſimilibus artificiis in ſubſidium vocandis tota ſolutio ad ternas aequationes differentiales primi gradus reduci queat, in quibus ſcilicet inſint terni anguli p, q et r, ſub quibus terna fila ad axem inclinantur. Verum vtcunque labor iſte ſucceſſerit, ſemper ad formulas vehementer intricatas perueniri neceſſe eſt, quam ob cauſam iſtam inueſtigationem vlterius non proſequor.

DE

DE VI FLVMINIS AD NAVES SVRSVM TRAHENDAS APPLICANDA.

Auctore
L. EVLERO.

§. 1.

Naui, quae aduerſis fluuii curſum, in directione *a* V protrahi debet, applicetur vtrinque rota, palmulis, vti A *a*, inſtructa, quae impetum aquae, ſecundum directionem V *a* impingentis, excipiant, ita vt vtraque rota ab hac vi circumagatur circa axem C, ambas rotas iungentem, qui idem axis intus in naui gerat cylindrum, cuius radius ſit CR, circa quem funis OR circumuoluatur. Funis autem in O obici fixo ſit alligatus. Quibus ita paratis manifeſtum eſt, dum rotae ab incurrente aqua in gyrum aguntur, cum iisque ſimul cylindrus, tum totam nauem a fune OR protrahi verſus O debere, propterea quod longitudo funis OR, dum cylindro circumuoluitur, continuo fit breuior, hocque modo nauis verſus O accedere cogitur. Tab. IV. Fig. 4.

§. 2. Tali igitur machina inſtructa, examinemus quanta celeritate nauis contra curſum fluminis ſit aſcenſura.

ra. Hunc in finem ponatur primo celeritas fluuii ſecundum directionem V $a = c$; 2°. ſit celeritas, qua punctum palmulae a circa axem C in directione $a\alpha$ mouetur $= u$; 3°. vero ſit v celeritas, qua nauis contra curſum fluminis promouetur. Praeterea vero vocetur radius rotae C $a = a$ et radius cylindri C R $= r$; hinc ergo celeritas, qua punctum R circa axem C gyratur, erit $\frac{ru}{a}$; quare cum longitudo funis O R hac ipſa celeritate curtetur, euidens eſt, fore celeritatem nauis $v = \frac{ru}{a}$, vnde ergo fit $u = \frac{av}{r}$.

§. 3. Vt nunc ipſam vim, qua aqua in palmulam impingit, rite determinemus, ſpectemus punctum a tanquam centrum palmulae; at bb exprimat ſuperficiem vtriusque palmulae ſimul impetum aquae excipientis. Hic ſcilicet ambas palmulas, quae vtrinque vim fluuii ſuſtinent, iunctim conſideramus; deinde hic quidem iſtas palmulas in ſitu verticali contemplamur, ita vt impulſio aquae in eas ſit perpendicularis; quoniam vero mox in ſitum obliquum detruduntur, vis aquae impellens vtique diminuetur; ſed quia ſequens palmula B b aquae immergitur, illa iactura hoc modo quaſi compenſatur, ita vt ſine notabili errore impulſionem aquae ita definire liceat, quaſi fluuius normaliter in ſuperficiem $= bb$ impingeret.

§. 4. Cum igitur ſuperficies plana $= bb$ impetum fluuii excipiat, eiusque vis proportionalis ſit quadrato celeritatis relatiuae, qua aqua ſuperficiem ferit, euidens eſt, ſi ſuperficies bb quieſceret, tum fluuium in eam incurrere celeritate ſua $= c$. At vero ipſae palmulae motu ſuo fugiunt quaſi impetum aquae celeritate $= u$,

ita

ita vt aqua tantum exceſſu illius celeritatis ſuper hanc, hoc eſt celeritate $c - u$ incurrere ſit cenſenda. Hoc modo res ſe haberet ſi nauis quieſceret, quia vero ea celeritate $= v$ contra fluuium mouetur, palmulae quoque tanta celeritate aduerſus fluuium aſſurgunt, vnde vera celeritas impulſionis erit $c - u + v$. Sicque vis impulſus erit vt $b b (c - u + v)^2$.

§ 5. Quo nunc iſtam vim ad menſuras abſolutas reuocemus, denotent litterae c, u et v ſpatia, quae his celeritatibus vno minuto ſecundo percurri poſſent, at vero ſit g altitudo, per quam grauia uno minuto ſecundo delabuntur; hisque conſtitutis notum eſt, vim illam, quam quaerimus, aequalem eſſe ponderi maſſae aqueae, cuius volumen $= \frac{b b (c - u + v)^2}{4 g}$, hanc ergo vim deſignemus littera P, ita vt ſit

$$P = b b (c - u + v)^2.$$

Quoniam igitur iam ſupra inuenimus $u = \frac{a v}{r}$, hoc valore ſubſtituto erit

$$P = \frac{b b (c r - v (a - r))^2}{4 g r r}.$$

§. 6. Inuenta iam hac vi, qua palmulae in puncto a ſecundum directionem $a \alpha$ vrgentur, conſideremus vim, qua funis OR tenditur, quae ſit $= Q$, ac manifeſtum eſt hanc vim Q in R applicatam aequilibrari debere cum vi P in a applicata, id quod euenit quando momenta harum virum reſpectu axis C inter ſe aequantur. Hinc igitur adipiſcimur iſtam aequationem: $P a = Q r$, ita vt ſit tenſio funis $Q = \frac{P a}{r}$.

§. 7. Praeter has autem duas vires P et Q praecipue adhuc conſiderari debet reſiſtentia, quam nauis in motu ſuo patitur, quamque deſignemus littera R. Haec autem vis etiam proportionalis eſt quadrato celeritatis, qua aqua in nauem incurrit; vnde quia celeritas fluuii eſt $= c$, nauis autem in directione contraria mouetur celeritate $= v$, erit celeritas relatiua $c + v$, ideoque reſiſtentia huius quadrato proportionalis. Quod autem ad nauis figuram attinet, denotet ff ſuperficiem planam, quae eandem reſiſtentiam patiatur, quam ipſa nauis, ſiquidem aqua directe incurrat, quam ſuperficiem vocari liceat reſiſtentiam nauis abſolutam, qua cognita tota reſiſtentia R aequabitur ponderi maſſae aqueae, cuius volumen $= \frac{ff(c+v)^2}{4g}$, ita vt ſit $R = \frac{ff(c+v)^2}{4g}$.

§. 8. Iam ex his tribus viribus P, Q, R, quibus nauis ſollicitatur, eius motum verum determinare poterimus. Primo autem nauis ſurſum pellitur a tenſione funis Q; tum vero non ſolum vis reſiſtentiae R in plagam contrariam vrget, ſed etiam vis P, quam palmulae in directione $a\alpha$ ſuſtinent, quamobrem ſi motus nauis iam ad vniformitatem fuerit perductus, id quod mox a primo initio fieri ſolet, neceſſe eſt, vt illae vires ſe mutuo in aequilibrio teneant, ideoque habebitur iſtae aequatio: $Q = P + R$.

§. 9. Quoniam igitur iam ſupra inuenimus $Q = \frac{Pa}{r}$, haec aequatio induet hanc formam: $\frac{P(a-r)}{r} = R$, quare ſi loco P et R valores ſupra inuenti ſubſtituantur, aequatio reſultabit iſta:

$$\frac{(a-r)bb(cr-v(a-r))^2}{r^3} = ff(c+v)^2.$$

Quod

Quod ſi iam ex hac aequatione radicem quadratam extrahamus, colligitur:

$$\frac{b((cr-v(a-r)}{r}\sqrt{\frac{a-r}{r}}=f(c+v),$$ ſiue

$$b(c-v\frac{(a-r)}{r})\sqrt{\frac{a-r}{r}}=f(c+v)$$

ex qua ergo aequatione celeritas nauis v innoteſcit.

§. 10. Pendet igitur iſta nauis celeritas v a ſequentibus elementis: 1°. a celeritate fluuii $=c$; 2°. a ſuperficie palmularum, impetum aquae in rota excipientium, quam ſuppoſuimus $=bb$; 3°. a reſiſtentia nauis abſoluta, quam per ſuperficiem $=ff$ indicauimus; et 4°. a ratione, quam radii rotarum C $a=a$ ad radium cylindri C R $=r$ tenent. Neutra enim harum duarum quantitatum a et r abſolute in calculum ingreditur, ſed tantum relatio, quam inter ſe tenent.

§ 11. Quo igitur noſtram aequationem ſimpliciorem reddamus, ſtatuamus $\frac{a-r}{r}=nn$, vt ſit $\frac{r}{a}=\frac{1}{nn+1}$, tum autem noſtra aequatio erit $b(c-nnv)n=f(c+v)$, ex qua aequatione colligimus $v=\frac{c(nb-f)}{n^3b+f}$; vnde patet, hanc celeritatem v tantum a ratione, quae inter quantitates b et f intercedit, pendere. Ita ſi ponamus $\frac{f}{b}=\lambda$, erit

$$v=\frac{c(n-\lambda)}{n^3+\lambda},\ \text{ſiue}\ \frac{v}{c}=\frac{n-\lambda}{n^3+\lambda}.$$

Ex qua aequatione ſtatim intelligitur, nauem aſcendere plane non poſſe, niſi fuerit $n>\lambda$, ſiue $nn>\lambda\lambda$. Erat autem $nn=\frac{a-r}{r}$ et $\lambda\lambda=\frac{ff}{bb}$, quamobrem ante omnia neceſſe eſt ſit $\frac{a-r}{r}>\frac{ff}{bb}$, ex qua conditione radius cylindri r ita definitur, vt ſit $r<\frac{abb}{bb+ff}$.

§. 12. Cum igitur eſſe debeat $n > \lambda$, hic imprimis quaeritur, quantus valor numero n tribui debeat, vt celeritas nauis v euadat maxima; quemadmodum enim ea euaneſcit caſu $n = \lambda$, etiam manifeſto euaneſcit ſumendo $n = \infty$, quo caſu radius cylindri r euaneſceret. Dabitur ergo certus valor pro numero n, quo iſta fractio: $\frac{n-\lambda}{n^3+\lambda}$ omnium maximum valorem adipiſcitur. Ad hunc igitur valorem inueniendum differentiale iſtius fractionis, ex variabilitate numeri n orivndum, nihilo aequale ſtatuatur, vnde ſequens emerget aequatio: $2n^3 = \lambda(3nn+1)$, vnde ergo pro quouis valore λ per reſolutionem aequationis cubicae maxime idoneus valor numeri n erui poterit.

§. 13. Neque vero opus eſt ad reſolutionem aequationis cubicae confugere: Eodem enim iure, quo litteram λ tanquam datam ſpectamus, poſſumus ipſam quantitatem n, quaſi data eſſet, ſpectare, tum autem facillime λ definietur; erit ſcilicet $\lambda = \frac{2n^3}{3nn+1}$. Hinc igitur, conſtituta pro lubitu ratione inter a et r, ſeu inter radios rotae et cylindri, vnde fit $n = \sqrt{\frac{a-r}{r}}$, valor ipſius λ dabit rationem $\frac{f}{b}$, vnde colligitur $bb = \frac{ff}{\lambda\lambda}$, ideoque ſuperficies palmularum ad maximum effectum producendum requiſita.

§. 14. Quod ſi vero ſumamus $\lambda = \frac{2n^3}{3nn+1}$, ipſa celeritas, qua nauis contra flumen aſcendit, ſatis ſimpliciter exprimetur, namque ob $n - \lambda = \frac{n(nn+1)}{3nn+1}$ et

$$n^3 + \lambda = \frac{3n^3(nn+1)}{3nn+1}, \text{ fiet } v = \frac{c}{3nn}.$$

Erit igitur $v = \frac{c}{3nn}$ maxima celeritas, quae naui imprimi poterit, dum palmulis rotarum tanta ſuperficies tribuitur, quan-

quantam pro $b\,b$ inuenimus, ſcilicet $b\,b = \frac{ff}{\lambda\lambda}$. Vnde intelligitur, quo celerius nauem promoueri deſideremus, eo minorem numerum pro n aſſumi debere; tum autem numerus λ eo minor reſultat; hinc autem porro ſuperficies palmularum $b\,b$ eo maior prodit. Vnde ſequitur, quod quidem per ſe eſt perſpicuum, quo magis palmulae rotarum amplificantur, eo maiorem celeritatem naui imprimi poſſe. Maxima autem celeritas quouis caſu obtinebitur, ſi inter radios rotae et cylindri ea ratio ſtabiliatur, quam numerus n poſtulat, ſcilicet vt ſit $r = \frac{a}{nn+1}$.

§. 15. Quo igitur quouis caſu facilius iſtum effectum maxime lucroſum diiudicare valeamus, ſequentem tabulam computemus, quae pro pluribus valoribus numeri n reſpondentes valores numeri λ exhibeat. Pro v autem ſucceſſiue ſumamus valores $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, 2, $\frac{5}{2}$, 3 etc. ſemiſſe vnitatis creſcentes, vsque ad decem, id quod ſufficit, cum ex valore $n = 10$ pro nauis celeritate v tantum pars trecenteſima celeritatis fluuii obtineatur; tam exiguus autem effectus vix attendi meretur.

n	$l\,\lambda$	λ	$\frac{r}{a}$	$\frac{v}{c}$
$\frac{1}{2}$	9,1549020	$0,14285 = \frac{1}{7}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{3}$
1	9,6989700	$0,50000 = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{3}{2}$	9,9400021	$0,87097 = \frac{27}{31}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{4}{27}$
2	0,0901766	$1,23077 = \frac{16}{13}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{12}$
$\frac{5}{2}$	0,1992829	$1,58228 = \frac{125}{79}$	$\frac{4}{29}$	$\frac{4}{75}$
3	0,2852358	$1,92857 = \frac{27}{14}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{27}$
$\frac{7}{2}$	0,3563172	$2,27153 = \frac{343}{151}$	$\frac{4}{53}$	$\frac{4}{147}$
4	0,4170139	$2,61224 = \frac{128}{49}$	$\frac{1}{17}$	$\frac{1}{48}$

n	$l\lambda$	λ	$\frac{r}{a}$	$\frac{v}{c}$
$\frac{9}{2}$	0,4700305	$2,95142 = \frac{729}{247}$	$\frac{4}{85}$	$\frac{4}{243}$
5	0,5171064	$3,28947 = \frac{125}{38}$	$\frac{1}{26}$	$\frac{1}{75}$
$\frac{11}{2}$	0,5595220	$3,62670 = \frac{1331}{367}$	$\frac{4}{125}$	$\frac{4}{363}$
6	0,5980572	$3,96330 = \frac{432}{109}$	$\frac{1}{37}$	$\frac{1}{108}$
$\frac{13}{2}$	0,6334092	$4,29942 = \frac{2197}{511}$	$\frac{4}{173}$	$\frac{4}{507}$
7	0,6660624	$4,63514 = \frac{343}{74}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{147}$
$\frac{15}{2}$	0,6964040	$4,97054 = \frac{3375}{679}$	$\frac{4}{229}$	$\frac{4}{675}$
8	0,7247427	$5,30570 = \frac{1024}{193}$	$\frac{1}{65}$	$\frac{1}{192}$
$\frac{17}{2}$	0,7513286	$5,64064 = \frac{4913}{871}$	$\frac{4}{293}$	$\frac{4}{867}$
9	0,7763677	$5,97541 = \frac{729}{122}$	$\frac{1}{82}$	$\frac{1}{243}$
$\frac{19}{2}$	0,8000313	$6,31003 = \frac{6859}{1087}$	$\frac{4}{365}$	$\frac{4}{1083}$
10	0,8224635	$6,64452 = \frac{2000}{301}$	$\frac{1}{101}$	$\frac{1}{300}$

§. 16. Ex hac iam tabula conficiatur alia, ad vſum practicum imprimis accommodata, cuius prima columna exhibeat planitiem palmularum bb, quae ſimul impetum aquae excipiat. Exprimetur autem ea per ſuperficiem ff, reſiſtentiam nauis metientem, eritque $bb = \frac{ff}{\lambda\lambda}$. Secunda columna referat radium cylindri $CR = r$ ad radium rotae $Ca = a$ relatum, vbi erit $r = \frac{a}{nn+1}$. Tertia columna exhibeat celeritatem v, qua nauis actu contra fluuium aſſurgit: ea exprimetur per celeritatem ipſius fluminis c, eritque $v = \frac{c}{3nn}$. Quarta denique columna exhibeat celeritatem u, qua palmulae rotae in gyrum mouentur; pro qua eſt

$$u = \frac{av}{r} = \frac{nn+1}{3nn} \cdot c = \tfrac{1}{3}c + v,$$

ita vt tantum opus ſit tertiam partem ipſius c ad v inſuper addere. Omnes autem iſtos valores in fractionibus decimalibus exprimamus.

b b

bb	r	v	u
49,000. ff	0,800. a	1,333. c	1,667. c
4,000. ff	0,500. a	0,333. c	0,667. c
1,318. ff	0,308. a	0,148. c	0,481. c
0,660. ff	0,200. a	0,083. c	0,417. c
0,399. ff	0,138. a	0,053. c	0,387. c
0,269. ff	0,100. a	0,037. c	0,371. c
0,194. ff	0,075. a	0,027. c	0,361. c
0,146. ff	0,058. a	0,021. c	0,354. c
0,115. ff	0,047. a	0,017. c	0,349. c
0,092. ff	0,038. a	0,014. c	0,347. c
0,076. ff	0,032. a	0,011. c	0,344. c
0,064. ff	0,027. a	0,009. c	0,342. c
0,054. ff	0,023. a	0,008. c	0,341. c
0,046. ff	0,020. a	0,007. c	0,340. c
0,040. ff	0,018. a	0,006. c	0,339. c
0,035. ff	0,016. a	0,005. c	0,338. c
0,031. ff	0,014. a	0,004. c	0,337. c
0,028. ff	0,012. a	0,004. c	0,337. c
0,025. ff	0,011. a	0,003. c	0,336. c
0,023. ff	0,009. a	0,003. c	0,336. c

§. 17. Vt vſum huius tabulae exemplo illuſtremus, ponamus palmulas rotarum tantas eſſe, vt earum ſuperficies bb ſit pars tertia reſiſtentiae abſolutae ff, ſiue $bb = 0,333 ff$ cum quo numero in prima columna proxime conuenivnt numeri 0, 399 et 0, 269 ideoque medium inter iis tenet. Hinc ex ſecunda columna fiet circiter $r = 0,119\,a$, ſiue radius cylindri nonae parti radii rotae aequalis capi debebit. Tum autem nauis contra curſum fluminis promouebi-

vebitur celeritate 0,0460, ſiue aequabitur circiter parti vigeſimae ſecundae celeritatis fluminis; celeritas autem rotae circa medium palmularum erit quaſi $= 0,379\, c$ ſiue aliquanto maior erit quam tertia pars celeritatis fluuii.

§. 18. Quod autem ad vſum practicum huiusmodi machinarum attinet, merito dubitamus, an vnquam conſultum eſſe poſſit, talem machinam adhibere. Cum enim eius apparatus haud exiguos ſumtus requirat, plerumque praeſtabit operas hominum adhibere, quandoquidem naues iis carere nequeunt, praecipue cum tantus effectus a ſatis mediocri hominum numero obtineri poſſit. Interim tamen problema in ſe ſpectatum vtique dignum videri debet, vt eius ſolutio per principia mechanica euolueretur.

Supplementum,
in quo totus nauis motus determinatur.

§. 19. Maneant omnes determinationes vti ſupra ſunt factae, niſi quod iam v ſit quantitas variabilis, ac celeritatem poſt tempus t minutorum ſecundorum acquiſitam denotet. Deinde tenſio funis Q nunc ante explorari debet quam motus explorari poteſt. Praeterea nunc in computum duci debent 1°.) Maſſa ſeu pondus totius nauis, quae ſit $= N$, per volumen aequae aequiponderans exprimendum; 2°.) Pro motu gyratorio noſſe oportet momentum inertiae rotarum circa axem gyrantium, quod ſit Mkk.

§. 20.

§. 20. Cum iam quaeſtio verſetur circa duplicem motum, alterum progreſſiuum, quo tota nauis contra curſum fluminis progreditur, cuius celeritas $= v$, alterum vero gyratorium, cuius celeritas angularis $= \frac{v}{r}$: pro priore vis acceleratrix erit $\frac{Q - P - R}{N}$, ipſa autem acceleratio $= \frac{dv}{2g\,dt}$, vnde haec oritur aequatio:

$$\frac{N\,dv}{2g\,dt} = Q - P - R.$$

Pro motu autem gyratorio, poſita breuitatis gratia diſtantia $a = mr$, momentum virium accelerantium erit $\frac{Pmr - Qr}{Mkk}$, acceleratio autem huius motus, ob celeritatem angularem $= \frac{v}{r}$, erit $\frac{dv}{2gr\,dt}$; vnde naſcitur iſta aequatio:

$$\frac{Mkk\,dv}{2g\,dt} = (mP - Q)rr.$$

Quod ſi iam iſta aequatio per praecedentem diuidatur, orietur iſta: $\frac{Mkk}{Nrr} = \frac{mP - Q}{P - Q - R}$, ex qua aequatione tenſio funis Q, hactenus incognita, determinari poteſt.

§. 21. Hunc in finem ponamus breuitatis ergo $\frac{Mkk}{Nrr} = \alpha$, vt habeamus $mP - Q = \alpha(Q - P - R)$, vnde deducimus $Q = \frac{(\alpha + m)P + \alpha R}{\alpha + 1}$. Hinc fit

$$Q - P - R = \frac{(m - 1)P - R}{\alpha + 1},$$

qui valor in prima aequatione ſubſtitutus praebebit hanc:

$$\frac{N\,dv}{2g\,dt} = \frac{(m - 1)P - R}{\alpha + 1},$$

vnde iam elementum temporis commode ita definitur:

$$\frac{2g\,dt}{N(\alpha + 1)} = \frac{dv}{(m - 1)P - R}.$$

§. 22. Subſtituamus nunc loco virium P et R valores iam ante inuentos, qui erant

$$P = \frac{(c - (m-1)v^2)\, b\, b}{4\, g} \text{ et } R = \frac{(c+v)^2 f f}{4\, g},$$

vnde aequatio praecedens induet hanc formam:

$$\frac{d\, t}{2\, N\, (\alpha + 1)} = \frac{d\, v}{(m-1)\, b\, b\, (c - (m-1)\, v)^2 - (c+v)^2\, f\, f}.$$

Quo iam haec aequatio commodior reddatur, ſtatuamus

$m - 1 = n\, n$ et $f = \lambda\, b$, vt fiat

$$\frac{b\, b\, d\, t}{2\, N\, (\alpha + 1)} = \frac{d\, v}{n\, n\, (c - n\, n\, v)^2 - \lambda\, \lambda\, (c+v)^2}.$$

§. 23. Quia igitur denominator hic eſt differentia duorum quadratorum, iſta formula reſolui poterit in duas partes, quae ſint

$$\frac{b\, b\, d\, t}{2\, N\, (\alpha + 1)} = \frac{A\, d\, v}{(n+\lambda)\, c - (n^3 - \lambda)\, v} + \frac{B\, d\, v}{(n-\lambda)\, c - (n^3 + \lambda)\, v},$$

vnde calculo ſubducto reperitur

$$A = \frac{-(n^3 - \lambda)}{2\, \lambda\, n\, c\, (1 + n\, n)} \text{ et } B = \frac{n^3 + \lambda}{2\, \lambda\, n\, c\, (1 + n\, n)},$$

vnde patet, vtramque formulam ſimpliciter ad logarithmum deduci; vnde integrale, ita ſumtum, vt euaneſcat poſito $v = 0$, erit

$$\frac{\lambda\, n\, (1 + n\, n)\, b\, b\, c}{(\alpha + 1)\, N}\, t = l \frac{(n+\lambda)\, c - (n^3 - \lambda)\, v}{(n-\lambda)\, c - (n^3 + \lambda)\, v} - l \frac{n+\lambda}{n-\lambda}.$$

Hinc patet, demum poſt tempus infinite magnum fieri $v = \frac{(n-\lambda)\, c}{n^3 + \lambda}$, quae erat celeritas iam ad ſtatum vniformitatis reducta.

§. 24. Hic igitur operae pretium erit caſum accuratius euoluere, quo celeritas ad vniformitatem reducta ſit maxima, pro quo ſupra inuenimus $2\, n^3 = \lambda\, (1 + 3\, n\, n)$. Quamobrem in aequatione noſtra inuenta loco λ valorem hinc natum ſcribamus $\lambda = \frac{2\, n^3}{1 + 3\, n\, n}$, vnde fit

$$n + \lambda = \frac{n + 5\, n^3}{1 + 3\, n\, n}; \quad n - \lambda = \frac{n + n^3}{1 + 3\, n\, n};$$

$$n^3 - \lambda = \frac{3\, n^5 - n^3}{1 + 3\, n\, n}; \quad n^3 + \lambda = \frac{3\, n^3\, (1 + n\, n)}{1 + 3\, n\, n};$$

quibus

quibus ſubſtitutis aequatio tranſit in hac formam:

$$\frac{\lambda n(1+nn)bbc}{(\alpha+1)N}t = l\frac{(1+5nn)c - nn(3nn-1)v}{(1+nn)(c-3nnv)} - l\frac{1+5nn}{1+nn}.$$

§. 25. Quo hinc facilius celeritatem v pro quovis tempore t obtineamus, ponamus

$$\frac{\lambda n(1+nn)bbc}{(\alpha+1)N} = \Delta$$

ſitque $e^{\Delta t} = T$, ita vt ex t hinc facile aſſignetur T, tum autem erit:

$$T = \frac{(1+5nn)c - nn(3nn-1)v}{(1+5nn)(c-3nnv)},$$

vnde fit

$$\frac{v}{c} = \frac{(1+5nn)(T-1)}{3Tnn(1+5nn) - nn(3nn-1)},$$

quae expreſſio pro initio, vbi $t = 0$ et $T = 1$, manifeſto euaneſcit.

§. 26. Ponamus tempus infinitum iam eſſe elapſum, ſeu eſſe $T = \infty$, hincque orietur vt ante $\frac{v}{c} = \frac{1}{3nn}$. Vt autem inueſtigemus, quam cito celeritas v ad hunc valorem proxime propinquat, conſideremus caſum, quo $\Delta = 1$ et $T = e^t$, vnde ob $e = 2,71828$ poſt 7 minuta ſecunda valor ipſius T circiter ad 1000 exſurgit. Hinc patet, elapſis $7''$ celeritatem v nulla amplius incrementa capere, hocque adeo multo citius eueniet, ſi fuerit $\Delta > 1$, contra autem tardius, ſi $\Delta < 1$.

§. 27. Denique adhuc notetur fractionis $\frac{c}{v}$ valorem ſequenti modo ſatis concinne exhiberi poſſe:

$$\frac{c}{v} = \frac{4nn(1+3nn)}{(T-1)(1+5nn)}.$$

DE STATV AEQVILIBRII MARIS A VIRIBVS SOLIS ET LVNAE SOLLICITATI.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Cum olim quaeſtio de fluxu et refluxu maris ſummo ſtudio ſit pertractata, atque adeo tres diſſertationes ab Academia Regia Scientiarum Pariſina praemio ſint condecoratae, hoc argumentum iam penitus exhauſtum videbitur, ita vt nihil amplius deſiderari queat. Quoniam vero illo tempore theoria de aequilibrio et motu fluidorum adhuc parum erat exculta, plurima ibi occurrunt, quae vel nimis operoſe et per plures ambages ex primis principiis ſunt deducta, vel etiam hypotheſibus precario aſſumtis et a veritate alienis ſunt ſuperſtructa. Variae opiniones a veritate abhorrentes inualuerunt, cuiusmodi ſunt, quod quantitas aeſtus marini potiſſimum ab interna Terrae ſtructura, quae nobis penitus eſt incognita, atque adeo etiam a grauitate ſpecifica aquae pendeat, ita vt, ſi ea

eſſet

eſſet vel maior vel minor, etiam aeſtus marini inde prodirent vel minores vel maiores, cum tamen ſecundum vera principia huius Theoriae poſtmodum ſtabilita hae circumſtantiae nihil ad ſcopum conferant.

§. 2. Quanquam autem hic praecipua quaeſtio circa motum maris verſabatur, tamen omnes, qui eius enodationem illo tempore ſuſceperunt, vnanimi conſenſu agnouerunt, nihil in hac re determinari poſſe, niſi ſtatus aequilibrii, in quo oceanus, a viribus tam Solis quam Lunae agitatus, aequieſcere queat, accuratae definiatur; vnde etiam iſtum aequilibrii ſtatum ex principiis tum temporis cognitis determinare ſunt conati, dum ex viribus, quibus ſingula puncta in ſuperficie maris ſollicitantur, eam curuam inueſtigarunt, quae ad omnes earum virium directiones medias eſſet normalis, quod principium vtique in natura rei eſt fundatum, ſed difficillimas euolutiones analyticas poſtulat, quas vix, ac ne vix quidem, expedire licuit. Tum vero etiam ad canales vsque ad centrum Terrae excauatos confugerunt et in eam figuram maris inquiſiuerunt, vt omnes iſte columnae fierent aequiponderantes, quae inueſtigatio vtique exactam cognitionem ſtructurae internae globi terraquei requirebat, quam quisque pro arbitrio ita finxerat, prouti ſcopo propoſito maxime conuenire videbatur, cum tamen nuncquidem actum ſit, inde vix quicquam ad hunc ſcopum conferri.

§. 3. Cum igitur poſt illud tempus theoriam de aequilibrio fluidorum ita mihi excolere et in lucem conſtituere contigerit, vt nihil inſuper deſiderari queat, his veris principiis inſiſtens illud argumentum denuo ſum ſuſ-

cepturus, quoniam hinc ad accuratam cognitionem ſtatus aequilibrii maris a viribus quibuscunque ſollicitati perueniemus, qua omnes illae opiniones peruerſae penitus remoueantur. Praeterea vero per haec noua principia tota iſta inueſtigatio a maximis illis difficultatibus, quibus ante premebatur, penitus liberabitur; atque hic imprimis ſummus vſus principii minimae actionis, quod illuſtriſſimo Praeſidi de Maupertuis acceptum referre debemus, clariſſime elucebit, cum eo vtentes plurimas easque difficillimas integrationes euitare queamus. Ab iſto igitur principio inchoëmus.

Principium Vniuerſale
Aequilibrii Fluidorum.

Tab. V. Fig. 1. §. 4. Si ſingulae fluidi particulae Z ad quotcunque virium centra fixa C, C′, C″ vrgeantur, viribus, quae ſint cuicunque functioni diſtantiarum proportionales, tum ſuperficies fluidi A Z B erit in aequilibrio, ſi ſumma actionum, quas vires in ſingula puncta Z exerunt, vbique fuerit eadem. Hinc ergo ſi vocentur diſtantiae

$$C\,Z = z,\quad C'\,Z = z,\quad C''\,Z = z''\ \text{etc.},$$

ipſae autem vires ad haec centra tendentes ſint Z, Z', Z'', etc., tum quia actiones harum virium per iſtas formulas exprimuntur: $\int Z\,dz$, $\int Z'\,dz'$, $\int Z''\,dz''$, pro ſtatu aequilibrii ſtatim habemus iſtam aequationem:

$$C = \int Z\,dz + \int Z'\,dz' + \int Z''\,dz'',$$

vbi C' denotat quantitatem conſtantem ex circumſtantiis definiendam.

Status

Status quaeſtionis.

§. 5. Conſideremus igitur totum globum terraqueum, ſiue circumquaque aqua circumfuſum, ſiue ex aliqua tantum parte, cuius figura foret perfecte ſphaerica, ſi nullae vires externae adeſſent; eius centrum ſit in C, radius vero C A vnitate deſignetur. Hic enim a motu vertiginis Terrae animum abſtrahimus, ita vt totus globus in perfecta quiete verſetur, et ſingulae eius particulae a ſola grauitate verſus centrum C vrgeantur, viribus vtcunque a diſtantia pendentibus. In ipſa autem ſuperficie vis grauitatis vnitate exprimatur. Quamcunque enim legem grauitas ad centrum accedendo tenuerit, ſi mutationes, quae eius figurae a viribus externis induci poſſunt, reſpectu totius magnitudinis Terrae fuerint quam minimae, prouti eas fore nouimus prope ſuperficiem, vis grauitatis nunquam ab vnitate diſcrepare cenſeri poteſt. Tum vero facile intelligitur, quamcunque mutationem vires externae ſuperficiei aquae induxerint in hypotheſi perfectae quietis, tum etiam admiſſo motu vertiginis eandem mutationem verae figurae Terrae, quae tum erit ſphaeroidica, accidere debere, quandoquidem etiam hoc caſu differentia a figura ſphaerica eſt quam minima. Tota enim inueſtigatio in eo verſatur, vt, quantum ſuperficies aquae a viribus externis vltra ſtatum naturalem ſiue attollatur ſiue deprimatur, inquiri debeat, ac tum perinde erit, ſiue figura naturalis fuerit ſphaerica, ſiue paulisper ab ea recedat. His igitur conſtitutis quaeſtio eo redit; vt dum vel Sol vel Luna in quocunque coeli loco verſentur, ibique tanquam fixi concipiantur, pro ſingulis punctis in ſuperficie maris aſſumtis quantitas actionis a viribus horum corporum nata rite defi-

definiatur. Vires autem tam Solis quam Lunae quadrato diſtantiarum reciproce proportionales aſſumemus.

De quantitate actionis a viribus Solis et Lunae orta.

§. 6. Quoniam pro ſtatu aequilibrii maris indagando ad quoduis tempus tam Sol quam Luna in eodem coeli loco permanere concipi debent, ſiquidem pro ſingulis momentis ſtatus aequilibrii variatur, ponamus diſtantiam Solis a centro Terrae perpetuo $= a$, diſtantiam vero Lunae ab eodem centro $= b$, quae igitur pro diuerſo luminarium ſitu diuerſos valores recipere poſſunt, inter quos medium ſumendo hae diſtantiae per radium Terrae vnitate deſignatum ita definientur, vt ſit $a = 24000$ et $b = 60\frac{1}{4}$ circiter. Praeterea vero vis Solis abſoluta tanta ſit, vt in diſtantia a centro Solis $= \alpha$ aequetur vi grauitatis $= 1$; pro Luna autem ſit iſta diſtantia, in qua eius vis grauitati aequaretur $= \beta$, vnde, ſi diſtantia a Sole fuerit $= z$, vis Solis erit $\frac{\alpha\alpha}{zz}$; ſin autem z ſit diſtantia a Luna, vis ibi ad Lunam tendens erit $= \frac{\beta\beta}{zz}$, ita vt hoc loco quantitates $\alpha\alpha$ et $\beta\beta$ idem denotent, quod vulgo per maſſam Solis vel Lunae indicari ſolet. Colligitur autem ex nouiſſimis parallaxis ſolaris determinationibus, fore $\alpha\alpha = 355426$, vnde fit $\alpha = 596$, ita vt in diſtantia Solis tot ſemidiametris Terrae aequali vis Solis aequetur ipſi vi grauitatis in ſuperficie Terrae. Pro Luna autem quantitas $\beta\beta$ a *Newtono* aeſtimata eſt $\frac{1}{40}$, Celeb. autem *Bernoulli* oſtendit, eam eſſe notabiliter minorem, ita vt propemodum aeſtimari poſſit $\beta = \frac{1}{5}$, vnde fieret $\beta\beta = \frac{1}{25}$.

§. 7.

§. 7. His igitur poſitis, ſi diſtantia ſiue Solis ſiue Lunae a puncto quocunque Z fuerit $= z$, erit vis hoc punctum ſollicitans, ſcilicet $Z = \frac{\alpha\alpha}{zz}$, pro Sole, et $Z = \frac{\beta\beta}{zz}$, pro Luna. Hinc ergo quantitas actionis pro Sole erit $\int Z\,dz = -\frac{\alpha\alpha}{z}$ et pro Luna $= -\frac{\beta\beta}{z}$. Sit igitur C centrum Terrae et S centrum Solis, ac ponatur diſtantia $CS = a$; tum vero conſideretur in ſuperficie maris, poſtquam ſe iam ad aequilibrium compoſuerit, punctum quodcunque Z, cuius diſtantia a centro Terrae, quae iam erit aliquantillum ſiue maior ſiue minor vnitate, ſit $CZ = r$, angulus vero SCZ vocetur $= \Phi$, eritque diſtantia Tab. V. Fig. 3.

$$ZS = z = \sqrt{(aa - 2ar\cos.\Phi + rr)},$$

ſicque quantitas actionis erit $= \frac{-\alpha\alpha}{\sqrt{(aa - 2ar\cos.\Phi + rr)}}$. Simili modo pro Luna, cuius diſtantiam a centro Terrae ponimus $= b$, ſi eius elongationem ab eodem puncto Z ſtatuamus $= \psi$, erit actio Lunae in punctum Z

$$= \frac{-\beta\beta}{\sqrt{(bb - 2br\cos.\psi + rr)}}.$$

§. 8. Hic autem probe perpendendum eſt, Solem et Lunam eatenus tantum in punctum Z agere, quatenus actio diſcrepat ab ea, quae in centrum Terrae exeritur. Cum igitur hoc centrum in S in directione CS ſollicitetur vi $= \frac{\alpha\alpha}{zz}$, punctum Z a pari vi in directione contraria ZX vrgeri cenſendum eſt, exiſtente ZX parallela ipſi CS; ad eam igitur ex C ducatur perdendicularis CX, voceturque interuallum $ZX = x$. Haec igitur vis ad punctum fixum, in recta ZX infinite remotum, trahere cenſenda eſt, ita vt diſtantia, quam in genere poſuimus $= z$, hic ſit $x + \infty$. Quia igitur ipſa vis, quam

poſuimus Z, hic eſt conſtans $= \frac{\alpha\alpha}{aa}$, erit eius actio in punctum Z

$$\int Z\, dz = \int \frac{\alpha\alpha}{aa}\, dx = \frac{\alpha\alpha}{aa} x.$$

Cum igitur ob angulum SCZ $= \Phi$ ſit ZX $= x = r \cos.\Phi$, iſta actio erit $\frac{\alpha\alpha r \cos.\Phi}{aa}$, vnde actio tota a Sole oriunda in punctum Z erit:

$$-\frac{\alpha\alpha}{\sqrt{(aa - 2ar\cos.\Phi + rr)}} + \frac{\alpha\alpha r \cos.\Phi}{aa},$$

ſimilique modo tota actio a Luna in punctum Z exerta:

$$= -\frac{\beta\beta}{(\sqrt{bb - 2br\cos.\psi + rr})} + \frac{\beta\beta r \cos.\psi}{bb}.$$

Aequatio

pro ſtatu aequilibrii maris a viribus Solis et Lunae ſollicitati.

Tab. V. Fig. 4. §. 9. Hic igitur ante omnia vis grauitatis, qua punctum maris quodcunque Z ad ipſum centrum Terrae C vrgetur, conſiderari debet, quam, quia nullam mutationem ſenſibilem ſubire poteſt, ob variatam diſtantiam CZ $= r$, vnitate deſignamus, ita vt hoc caſu ſit $z = r$ et $Z = 1$. Hinc ergo actio grauitatis in punctum maris Z erit $= r$. Quam ob rem ſi curua AZB denotet ſuperficiem maris iam ad aequilibrium reductam; tum vero hoc tempore Sol et Luna verſentur in punctis S et L, ita vt diſtantiae ſint CS $= a$ et CL $= b$, anguli vero SCZ $= \Phi$ et LCZ $= \psi$, ſumma omnium actionum, quibus punctum Z vrgetur, erit:

$$= r - \frac{\alpha\alpha}{\sqrt{(aa - 2ar\cos.\Phi + rr)}} + \frac{\alpha\alpha r \cos.\Phi}{aa} - \frac{\beta\beta}{\sqrt{(bb - 2br\cos.\psi + rr)}} + \frac{\beta\beta r \cos.\psi}{bb}$$

quae

quae ergo pro ſtatu aequilibrii debet aequari quantitati conſtanti, quam deſignemus littera C, atque hoc modo pro figura, quam mare accipiet, ſtatim nanciſcimur iſtam aequationem finitam atque adeo algebraicam:

$$C = r - \frac{\alpha\alpha}{\surd(aa - 2ar\,\text{coſ.}\,\Phi + rr)} + \frac{\alpha\alpha r\,\text{coſ.}\,\Phi}{aa} - \frac{\beta\beta}{\surd(bb - 2br\,\text{coſ.}\,\Psi + rr)} + \frac{\beta\beta r\,\text{coſ.}\,\Psi}{bb}.$$

Hinc igitur praeſtantia huius methodi, principio minimae actionis innixae, clariſſime elucet, cum nobis ſtatim aequationem algebraicam pro ſtatu aequilibrii maris ſit largita, dum olim iſta determinatio per calculos moleſtiſſimos, ex hypotheſibus precario aſſumtis, deriuari debuerit. Hi enim calculi plerumque abſtruſiſſimas ſectionum conicarum proprietates requirebant, ſimulque ita erant comparati, vt nullo modo pateret, quomodo ad aequationem algebraicam peruenire poſſet, niſi adhibitis approximationibus. Hic autem nulla adhuc approximatione ſumus vſi.

§. 10. Nunc autem facillime eas approximationes, quae ad ſcopum noſtrum erant accommodatae, expedire poterimus. Cum enim diſtantiae a et b ſint praegrandes ratione radii $CZ = r$, euoluamus in genere hanc formulam irrationalem: $(aa - \Omega)^{-\frac{1}{2}}$, quae praebet ſequentem ſeriem:

$$\frac{1}{a} + \frac{1.\,\Omega}{2.\,a^3} + \frac{1.\,3.\,\Omega^2}{2.\,4\,a^5} + \frac{1.\,3.\,5.\,\Omega^3}{2.\,4.\,6.\,a^7} + \text{etc.}$$

Nunc igitur pro Sole habemus $\Omega = 2ar\,\text{coſ.}\,\Phi - rr$, vnde elicimus

$$\frac{1}{\surd(aa - 2ar\,\text{coſ.}\,\Phi + rr)} = \frac{1}{a} + \frac{r\,\text{coſ.}\,\Phi}{aa} - \frac{rr}{2a^3}(1 - 3\,\text{coſ.}\,\Phi^2) - \frac{r^3\,\text{coſ.}\,\Phi}{2a^4}(3 - 5\,\text{coſ.}\,\Phi^2),$$

 ſimili

ſimili autem modo erit pro Luna:

$$\frac{1}{\sqrt{(bb - 2br\,\text{coſ.}\,\psi + rr)}} = \frac{1}{b} + \frac{r\,\text{coſ.}\,\psi}{bb} - \frac{rr}{2b^3}(1 - 3\,\text{coſ.}\,\psi^2)$$
$$- \frac{r^3\,\text{coſ.}\,\psi}{2b^4}(3 - 5\,\text{coſ.}\,\psi^2).$$

Quoniam igitur hic prima membra conſtantia ſub conſtante C complecti licet, tota aequatio in ſequentem formam contrahetur:

$$0 = C + r + \frac{\alpha\alpha rr}{2a^3}(1 - 3\,\text{coſ.}\,\Phi^2) + \frac{\alpha\alpha r^3\,\text{coſ.}\,\Phi}{2a^4}(3 - 5\,\text{coſ.}\,\Phi^2)$$
$$+ \frac{\beta\beta rr}{2b^3}(1 - 3\,\text{coſ.}\,\psi^2) + \frac{\beta\beta r^3\,\text{coſ.}\,\psi}{2b^4}(3 - 5\,\text{coſ.}\,\psi^2).$$

Quod ſi ergo breuitatis gratia ſtatuamus $\frac{\alpha\alpha}{2a^3} = A$ et $\frac{\alpha\alpha}{2a^4} = \mathfrak{A}$, tum vero $\frac{\beta\beta}{2b^3} = B$ et $\frac{\beta\beta}{2b^4} = \mathfrak{B}$, aequatio noſtra erit:

$$0 = C + r + A\,rr(1 - 3\,\text{coſ.}\,\Phi^2) + \mathfrak{A}\,r^3\,\text{coſ.}\,\Phi(3 - 5\,\text{coſ.}\,\Phi^2)$$
$$+ B\,rr(1 - 3\,\text{coſ.}\,\psi^2) + \mathfrak{B}\,r^3\,\text{coſ.}\,\psi(3 - 5\,\text{coſ.}\,\psi^2)$$

mox autem patebit litteras A, B, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, fractiones eſſe quam minimas.

§. 11. Hactenus radium Terrae in ſtatu naturali vnitate expreſſimus. Quoniam vero exceſſum vel defectum quantitatis r ſupra vel infra hanc vnitatem in menſuris abſolutis, ſcilicet pedibus, deſideramus, ponamus radium Terrae naturalem $= k$, ita vt ſit vti ſupra oſtendimus $\alpha = 596\,k$ et $\beta = \frac{k}{2}$; tum vero pro diſtantiis mediis Solis et Lunae $a = 24000\,k$ et $b = 60\,k$, tantum opus eſt, vt hac littera k omnes termini aequationis inuentae ad eundem dimenſionum numerum reducantur; vnde cum in termino principali, qui eſt r, vnica ſit dimenſio, etiam in reliquis terminis vnica dimenſio ineſſe debet; quare quia litterae α, β, a et b iam vnam dimenſionem continent, aequatio noſtra ſequenti modo exhiberi debet:

$0 =$

$$o = C + r + \frac{\alpha\alpha rr}{2a^3}(1 - 3\,\mathrm{coſ.}\Phi^2) + \frac{\alpha\alpha r^3\,\mathrm{coſ.}\Phi}{2a^4}(3 - 5\,\mathrm{coſ.}\Phi^2)$$
$$+ \frac{\beta\beta rr}{2b^3}(1 - 3\,\mathrm{coſ.}\psi^2) + \frac{\beta 3 r^3\,\mathrm{coſ.}\psi}{2a^4}(3 - 5\,\mathrm{coſ.}\psi^2)$$

quae ergo a praecedente non differt, et hoc nobis praeſtat commodum, vt nunc radium Terrae k tuto per quamcunque menſuram abſolutam exprimere poſſimus, veluti in pedibus. Ex menſuris autem actu inſtitutis iſte radius terrae k deprehenſus eſt continere 19601352 pedes pariſinos.

§. 12. Quoniam igitur iam certi ſumus diſtantiam r non vltra aliquot pedes a radio naturali k differre poſſe, ſtatuamus $r = k + v$, ita vt v ſit quantitas quam minima prae k, ideoque

$$rr = kk + 2kv \text{ et } r^3 = k^3 + 3kkv,$$

quibus valoribus introductis aequatio noſtra pro quantitate v determinanda ita ſe habebit:

$$o = C + k + \frac{\alpha\alpha kk}{2a^3}(1 - 3\,\mathrm{coſ.}\Phi^2) + \frac{\alpha\alpha k^3\,\mathrm{coſ.}\Phi}{2a^4}(9 - \mathrm{coſ.}\Phi^2)$$
$$+ \frac{\beta\beta kk}{2b^3}(1 - 3\,\mathrm{coſ.}\psi^2) + \frac{\beta\beta k^3\,\mathrm{coſ.}\psi}{2b^4}(3 - 5\,\mathrm{coſ.}\psi^2)$$
$$+ v\left(1 + \frac{\alpha\alpha k}{a^3}(1 - 3\,\mathrm{coſ.}\Phi^2) + \frac{\alpha\alpha kk\,\mathrm{coſ.}\Phi}{2a^4}(9 - \mathrm{coſ.}\Phi^2)\right)$$
$$+ \frac{\beta\beta k}{b^3}v\left((1 - 3\,\mathrm{coſ.}\psi^2) + \frac{\beta\beta kk\,\mathrm{coſ.}\psi}{2b^4}(3 - 5\,\mathrm{coſ.}\psi^2)\right),$$

vbi ergo $C + k$ quantitatem minimam exprimere debebit. Quod ſi ergo loco $C + k$ ſcribamus $-c$ et priores terminos ad alteram partem aequationis transferamus, aequatio noſtra hanc induet formam:

$$v\left(1 + \frac{\alpha\alpha k}{a^3}(1 - 3\,\mathrm{coſ.}\Phi^2) + \frac{\alpha\alpha kk\,\mathrm{coſ.}\Phi}{2a^4}(9 - \mathrm{coſ.}\Phi^2)\right.$$
$$\left.+ \frac{\beta\beta k}{b^3}(1 - 3\,\mathrm{coſ.}\psi^2) + \frac{\beta\beta kk\,\mathrm{coſ.}\psi}{2b^4}(3 - 5\,\mathrm{coſ.}\psi^2)\right)$$
$$= c - \frac{\alpha\alpha kk}{2a^3}(1 - 3\,\mathrm{coſ.}\Phi^2) - \frac{\alpha\alpha k^3\,\mathrm{coſ.}\Phi}{2a^4}(9 - \mathrm{coſ.}\Phi^2)$$
$$- \frac{\beta\beta kk}{2b^3}(1 - 3\,\mathrm{coſ.}\psi^2) - \frac{\beta\beta k^3\,\mathrm{coſ.}\psi}{2b^4}(3 - 5\,\mathrm{coſ.}\psi^2),$$

vbi c eſt conſtans per integrationem ingreſſa, quam quovis caſu ita determinari oportet, vt totum mare in ſtatu mutato adhuc eandem aquae quantitatem contineat atque in ſtatu naturali.

Euolutio numerica Aequationis inuentae per Pedes Pariſinos.

§. 13. Primo igitur littera c certum numerum pedum deſignabit, ex quantitate omnis aquae, quam mare continet, definiendum; tum vero, vt ſupra vidimus, eſt $\alpha = 596\,k$, $\beta = \frac{k}{2}$, pro diſtantiis autem mediis Solis et Lunae ſumamus $a = 24000\,k$ et $b = 60\,k$. Hinc ergo pro aequationis noſtrae parte priore habebimus vt ſequitur:

$$\frac{\alpha\alpha k}{a^3} = \frac{596^2}{24000^3} = 0,0000000257$$
$$\frac{\alpha\alpha kk}{2a^4} = \frac{596^2}{2.\,24000^4} = 0,0000000000$$
$$\frac{\beta\beta k}{b^3} = \frac{1}{64.\,60^3} = 0,0000000723$$
$$\frac{\beta\beta kk}{2b^4} = \frac{1}{128.\,60^4} = 0,0000000006$$

vnde patet, pro prima parte noſtrae aequationis ſine vllo errore ſcribi poſſe v. Pro altera autem aequationis parte habebimus:

$$\frac{\alpha\alpha kk}{2a^3} = \frac{596^2.\,k}{2.\,24000^3} = 0,25183$$
$$\frac{\alpha\alpha k^3}{6a^4} = \frac{596^2.\,k}{6.\,24000^4} = 0,00000$$
$$\frac{\beta\beta kk}{2b^3} = \frac{k}{2.\,64.\,60^3} = 0,70896$$
$$\frac{\beta\beta k^3}{2b^4} = \frac{k}{6.\,64.\,60^4} = 0,00399.$$

Hinc

Hinc igitur aequatio noſtra hanc induet formam:

$$v = c - 0,25183\,(1 - 3\cos.\Phi^2) - 0,70896\,(1 - 3\cos.\psi^2)$$
$$- 0,00000\cos.\Phi\,(3 - 5\cos.\Phi^2) - 0,01197\cos.\psi\,(3 - 5\cos.\psi^2)$$

vnde valor ipſius v in pedibus Pariſinis elicietur.

§. 14. Ponamus breuitatis gratia iſtos valores numericos modo inuentos, pro Sole: $0,25183 = m$, pro Luna autem: $0,70896 = n$ et $\nu = 0,01197$, vt ſit:

$$v = c + m\,(3\cos.\Phi^2 - 1) + n\,(3\cos.\psi^2 - 1)$$
$$+ \nu\cos.\psi\,(5\cos.\psi^2 - 3).$$

Vbi notetur, valorem ipſius m, ad Solem pertinentem, ſatis eſſe iuſtum, dummodo ad diſtantiam mediam Solis et Terrae referatur, at vero valores n et ν quodammodo adhuc eſſe incertos, quoniam a maſſa Lunae pendent, pro qua aſſumſimus litteram $\beta = \frac{1}{8}k$, quemadmodum praeceſſio aequinoxiorum poſtulare videtur; fieri igitur poſſet vt aliquanto maior vel minor accipi deberet. Praeterea vero etiam hi valores ad diſtantiam mediam Lunae a Terra ſunt accomodati, vnde eos, ſi Luminaria fuerint in Apogeo, paulisper diminui, in Perigeo autem augeri oportet. Quare cum excentricitas Solis ſit quaſi $\frac{1}{60}$, ſi Sol fuerit in Apogeo, littera m diminui debet in ratione triplicata diſtantiae, ſiue vt $1 : (1 + \frac{1}{60})^3$, quae ratio proxime eſt vt $1 : 1\frac{1}{20}$, vnde pro Apogeo Solis fit $m = 0,23924$, pro Perigeo autem tanto maior, id eſt $m = 0,26442$. Deinde quia Lunae excentricitas eſt quaſi $\frac{1}{18}$, pro eius Apogeo valor litterae n diminui debet ſua parte ſexta, ita vt ſit $n = 0,59080$, pro Perigeo vero tantundem augeri, fietque $n = 0,82712$. Littera denique ν, quae biquadrato

drato diſtantiae reciproce eſt proportionalis, pro Apogeo fiet $\nu = 0,00931$, pro Perigeo vero $\nu = 0,01463$. Hoc igitur modo harum litterarum valores minimi, medii et maximi ita ſe habebunt:

Valor	min.	med.	max.
m	0, 23924	0, 25183	0, 26442
n	0, 59080	0, 70896	0, 82712
ν	0, 00931	0, 01197	0, 01463

Sufficiet autem hos valores noſſe, quoniam ridiculum foret, in hoc negotio minutiis inhaerere.

Applicatio Formulae inuentae
ad ſuperficiem Sphaericam.

Tab. V. Fig. 5 §. 15. Repraeſentet iam circulus A B C D globum terraqueum, in cuius ſuperficie notentur puncta S et L, quibus hoc tempore Sol et Luna verticaliter immineant, ita vt Sol verſetur in zenith loci S, Luna vero in zenith loci L, et quaeramus ſtatum maris, quem pro hoc luminarium ſitu eſſet accepturum. Conſideremus igitur in maris ſuperficie quodcunque punctum Z, quod ſupra libellam naturalem ab actione luminarium attollatur per interuallum $= v$, in pedibus Pariſinis determinandum. Hinc ergo ad puncta S et L ducantur arcus circulorum maximorum ZS et ZL, qui vocentur $ZS = \Phi$ et $ZL = \psi$, ac manifeſtum eſt angulum Φ exprimere diſtantiam Solis a puncto zenith loci Z, ſimilique modo angulus ψ diſtantiam Lunae ab eodem zenith, quibus poſitis ſpatium eleuationis v ſupra libellam definietur hac aequatione:

$v =$

$$v = c + m(3\cos.\Phi^2 - 1) + n(3\cos.\psi^2 - 1)$$
$$+ \nu \cos.\psi(5\cos.\psi^2 - 3),$$

vbi quantitas conſtans c quouis caſu ita debet determinari, vt facta mutatione ſtatus etiamnunc eadem copia aquae in mari propoſito reperiatur.

§. 16. Ad hanc igitur conſtantem c inueniendam, Tab. V. Fig. 5. tota figura eius maris, cuius ſtatus quaeritur, probe eſt perpendenda, niſi quaeſtio inſtituatur de vniuerſo oceano totam Terram ambiente. Sit igitur $a\,b\,c\,d$ mare illud vndequaque clauſum et terminatum, cuius ſtatus aequilibrii pro deſcripto luminarium ſitu deſideretur; eius quoduis elementum circa punctum Z ſitum deſignetur per d S, cui ergo inſiſtit columna aquea altitudinis $= v$, ita vt eius volumen ſit $v\,d$ S. Haec igitur formula differentialis integretur, eiusque integrale per totum ſpatium $a\,b\,c\,d$ extendatur, vt obtineatur tota maſſa aquea huic ſpatio inſiſtens, quae cum eſſe debeat nihilo aequalis, ex aequatione $\int v\,d\,\mathrm{S} = 0$ colligetur valor conſtantis c. Perſpicuum autem eſt, hoc fieri non poſſe, niſi per totum ſpatium $a\,b\,c\,d$ valores negatiui ipſius v valoribus poſitiuis aequiualeant. Ex quo facile intelligitur, valorem iſtius conſtantis c non ſolum a figura maris propoſiti $a\,b\,c\,d$, ſed etiam a poſitione luminarium S et L potiſſimum pendere, ita vt pro quouis alio ſitu iſta inueſtigatio de nouo inſtitui debeat. Deinceps autem videbimus, quomodo hanc rationem expedire conueniat.

§. 17. Hic autem aſſumamus, iſtius litterae c valorem iam rite eſſe aſſignatum, et ſpatium $a\,b\,c\,d$ per to-

 tam

tam Terrae ſuperficiem eſſe extenſum, vt, quantum aqua in ſingulis Terrae locis ſiue ſupra libellam attolli ſiue infra eam deprimi debeat, definire queamus. Ac primo quidem facile patet, aquam maxime eleuari debere in loco quodam inter puncta S et L ſito, qui ſit in E, quandoquidem nouimus, ab vtriusque luminaris actione ſeorſim conſiderata aquam maxime attolli in eo loco, cui luminare verticaliter imminet. Ponamus igitur diſtantiam luminarium $SL = \zeta$, ac translato puncto indefinito Z in E habebimus arcum $SE = \Phi$, arcum vero $LE = \zeta - \Phi = \psi$, ita vt ſit $d\psi = -d\Phi$. Quare pro maximo valore ipſius v inueniendo, eius differentiale nihilo aequemus, at ob $d\psi = -d\Phi$ prodibit iſta aequatio:

$$-6m\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi + 6n\,\text{ſin.}\,\psi\,\text{coſ.}\,\psi + 15\nu\,\text{ſin.}\,\psi\,\text{coſ.}\,\psi^2 - 3\nu\,\text{ſin.}\,\psi = 0,$$

vbi cum ν ſit valde paruum prae m et n, erit proxime:

$$-m\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi + n\,\text{ſin.}\,\psi\,\text{coſ.}\,\psi = 0, \text{ ſiue}$$

$$m\,\text{ſin.}\,2\Phi = n\,\text{ſin.}\,2\psi = n\,\text{ſin.}\,(2\zeta - 2\Phi),$$

ſicque punctum E ibi reperietur, vbi erit

$$m\,\text{ſin.}\,2\,SE = n\,\text{ſin.}\,2\,LE.$$

§. 18. Cum igitur ſit

$$\text{ſin.}\,(2\zeta - 2\Phi) = \text{ſin.}\,2\zeta\,\text{coſ.}\,2\Phi - \text{coſ.}\,2\zeta\,\text{ſin.}\,2\Phi,$$

hinc colligitur fore $\text{tang.}\,2\Phi = \frac{n\,\text{ſin.}\,2\zeta}{m + n\,\text{coſ.}\,2\zeta}$. Quaeratur ergo angulus θ, cuius tangens ſit $= \frac{n\,\text{ſin.}\,2\zeta}{m + n\,\text{coſ.}\,2\zeta}$, et cum eadem quoque ſit tangens anguli $\theta + 180°$, hinc nanciſcemur duos valores pro angulo Φ, quorum alter erit $\Phi = \frac{1}{2}\theta$, alter vero $\Phi = \frac{1}{2}\theta + 90°$. Prior igitur manifeſto dat locum

cum E, vbi aqua maxime eleuabitur, poſterior vero eum locum, vbi maxime deprimetur, qui ergo a loco E interuallo quadrantis erit remotus in arcu S L producto. Simul vero etiam patet, in locis diametraliter oppoſitis aquam fore vel maxime eleuatam vel depreſſam.

§. 19. Haec autem, quoniam ad diſtantiam quamcunque inter luminaria ſpectant, nimis ſunt generalia, quam vt inde concluſiones concinnas deriuare queamus. Infra autem has determinationes ad caſus particulares accommodabimus. Nunc autem rem in genere conſiderantes videamus ſtatum aquae tam in ipſo loco S quam in loco L. Pro priore igitur, translato puncto Z in S, erit $\Phi = 0$ et $\psi = \zeta$, vnde fit

$$v = c + 2m + n(3\,\text{coſ.}\,\zeta^2 - 1) + \nu\,\text{coſ.}\,\zeta(5\,\text{coſ.}\,\zeta^2 - 3);$$

at vero translato Z in L erit $\Phi = \zeta$ et $\psi = 0$, hincque

$$v = c + m(3\,\text{coſ.}\,\zeta^2 - 1) + 2n + 2\nu.$$

Sin autem punctum Z ita capiatur, vt ambo arcus S Z et L Z fiant quadrantes, tum ob $\Phi = 90°$ et $\psi = 90°$ erit $v = c - m - n$, vbi ergo aqua ſemper erit maxime depreſſa.

Applicatio ad hypotheſin,

qua tota Terra aqua circumdata ponitur.

§ 20. Contemplemur nunc caſum, quo tota Terra eſſet fluida, vel ſaltem continuo maris tractu cincta, et quaeramus valorem quantitatis conſtantis c pro quouis ſitu amborum luminarium, vt inde vera eleuatio maris ſuper libellam naturalem in omnibus locis aſſignari queat.

Ad hoc igitur neceſſe eſt, vt formula integralis $\int v\, d\, S$ per totam Terrae ſuperficiem extendatur et valor reſultans nihilo aequetur; ſic enim peruenietur ad aequationem, ex qua quantitas c facile determinari poterit. Vbi notetur, differentiale $d\, S$ exprimere elementum quodcunque ſuperficiei ſphaericae.

§. 21. Cum igitur valor quantitatis v ex quatuor partibus ſit compoſitus, quarum prima eſt ipſa conſtans c, quae quaeritur; ſecunda, actio a Sole orta $m(3\,\text{coſ.}\,\Phi^2 - 1)$; tertia, actio principalis a Luna orta $n(3\,\text{coſ.}\,\psi^2 - 1)$; quarta denique, correctio iſtius actionis $= \nu\,\text{coſ.}\,\psi(5\,\text{coſ.}\,\psi^2 - 3)$: ſingulas iſtas partes in elementum ſuperficiei $d\, S$ ducamus et integralia per totam ſuperficiem Terrae extendamus, quo facto aggregatum omnium nihilo aequari debebit. Prima igitur pars, ſeu conſtans c ſtatim praebet $\int c\, d\, S = c\, S$, vbi loco S totam ſuperficiem Terrae aſſumi oportet. Hic iterum radium Terrae vnitate deſignemus, quandoquidem non quantitas abſoluta ſpectatur, ac poſita ratione diametri ad peripheriam vt $1 : \pi$, notum eſt, totam ſuperficiem Sphaere eſſe $= 4\,\pi$, vnde integrale ex prima parte ortum erit $= 4\,\pi\, c$.

Tab. V. Fig. 6. §. 22. Pro ſecunda parte $m(3\,\text{coſ.}\,\Phi^2 - 1)$ circa punctum S in ſuperficie ſphaerica deſcribamus circulum, interuallo $S\,Z = \Phi$, eritque ſin. Φ radius huius circuli in plano conſiderati, eiusque propterea peripheria $= 2\,\pi\,\text{ſin.}\,\Phi$. Iam tribuamus arcui $S\,Z = \Phi$ incrementum infinite paruum $Z\,z = d\,\Phi$, quod in peripheriam $2\,\pi\,\text{ſin.}\,\Phi$ ductum dabit incrementum areae iſtius areae circularis in ſuperficie ſphaerica, quod ergo erit $= 2\,\pi\, d\,\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi$; quamobrem

iſtud

iſtud incrementum per ſecundam partem $m(3\cos.\phi^2 - 1)$ multiplicetur, et integrari debebit iſta formula:

$$2m\pi d\phi \sin.\phi(3\cos.\phi^2 - 1).$$

Hunc in finem ponamus

$$\cos.\phi = x, \text{ eritque } d\phi \sin.\phi = -dx,$$

et formula integranda euadet $= -2m\pi dx(3xx - 1)$, cuius ergo integrale ſit

$$2m\pi(x - x^3) + C = 2m\pi(\cos.\phi - \cos.\phi^3) + C,$$

quae conſtans C autem euaneſcit, quia integrale inuentum ſponte fit $= 0$, ſumto arcu $\phi = 0$, ita vt integrale ex hac parte ortum ſit $2m\pi\cos.\phi\sin.\phi^2$, cuius valor vt per totam ſuperficiem ſphaericam extendatur, arcus indefinitus ϕ ſumi debet ſemicirculo aequalis; vnde, cum fiat $\sin.\phi = 0$, euidens eſt, integrale ex ſecunda parte ipſius v natum ſponte fieri $= 0$, atque hinc ſimul manifeſtum eſt, etiam integrale ex tertia parte oriundum ad nihilum reduci.

§. 23. Pro parte quarta ipſius v in figura loco S ſumatur punctum L, voceturque arcus $LZ = SZ = \psi$, et quia elementum ſpatii circularis nunc erit $2\pi d\psi \sin.\psi$, formula differentialis ex quarta parte nata erit

$$2\nu\pi d\psi \sin.\psi \cos.\psi(5\cos.\psi^2 - 3).$$

Faciamus hic iterum $\cos.\psi = x$, vt habeamus hanc formulam: $-2\nu\pi x dx(5xx - 3)$, cuius integrale eſt

$$-2\nu\pi(\tfrac{5}{4}x^4 - \tfrac{3}{2}xx) = 2\nu\pi(\tfrac{5}{4}\cos.\psi^4 - \tfrac{3}{2}\cos.\psi^2) + C.$$

Erit autem $C = \frac{1}{2}\nu\pi$. Extendatur nunc hoc integrale per totum Sphaeram, ponendo $\psi = 180$, atque etiam haec quarta pars euadet $= 0$.

§. 24. Hinc igitur patet, ſi tota terra continuo oceano eſſet obducta, tum ſemper fore conſtantem $c = 0$, in quocunque loco coeli ambo luminaria verſentur, ita vt pro hac hypotheſi ſemper valeat iſta aequatio:

$$v = m(3 \text{ coſ. } \Phi^2 - 1) + n(3 \text{ coſ. } \psi^2 - 1) + \nu \text{ coſ. } \psi (5 \text{ coſ. } \psi^2 - 3),$$

vnde pro ſingulis Terrae locis eleuatio aquae ſupra libellam in pedibus pariſinis definiri poterit. Scilicet ſi valor ipſius v prodeat poſitiuus, eleuatio ſupra libellam naturalem indicabitur; vbi autem obtinuerit valorem negatiuum, ibi depreſſio infra libellam indicabitur. Haec autem omnia intelligenda ſunt de ſtatu aequilibrii, quem actio luminarium Terrae eſſet inductura, ſi tam Terra quam ipſa luminaria perpetuo in eodem loco quieſcerent. In hac igitur hypotheſi ſequens Problema reſolui poterit.

Problema.

§. 25. In hypotheſi Terrae quieſcentis et oceano continuo circumdatae, ſi dentur in coelo loca Solis et Lunae, vbi per aliquot tempus commorari concipi debent, vt totus Oceanus ſe ad ſtatum aequilibrii componere poſſit, in omnibus Terrae locis ſiue eleuationem ſiue depresſionem aquae ſupra vel infra libellam naturalem determinare.

Solutio.

Tab. V. Fig. 7. Referat circulus AEBF ſuperficiem Terrae, vbi A et B ſint Poli borealis et auſtralis, ſemicirculus vero AEB repraeſentet primum meridianum, tum vero puncta S et L ea ſint loca, quibus Sol et Luna verticaliter immineant, pro

pro quibus ductis meridianis A S et A L, ſint longitudines E A S $=\zeta$ et E A L $=\eta$, diſtantiae vero a polo boreali A vocentur A S $=f$ et A L $=g$. Iam proponatur Terrae locus quicunque Z, cuius longitudo ſit E A Z $=\omega$, et diſtantia a Polo A Z $=z$. Quo igitur pro hoc loco quantitas v poſſit definiri, eius diſtantiae a punctis S et L, ſcilicet arcus Z S $=\phi$ et Z L $=\psi$ quaeri debent. Pro priore Z S $=\phi$ ex triangulo ſpaerico Z A S, in quo habentur latera A Z $=z$ et A S $=f$, cum angulo intercepto Z A S $=\zeta-\omega$, deducitur:

$$\text{coſ. } SZ = \text{coſ. } \phi = \text{coſ. } f \text{ coſ. } z + \text{ſin. } f \text{ ſin. } z \text{ coſ. } (\zeta-\omega).$$

Simili modo ex triangulo Z A L, in quo habentur latera Z A $=z$ et A L $=g$, cum angulo intercepto Z A L $=\eta-\omega$, colligitur

$$\text{coſ. } LZ = \text{coſ. } \psi = \text{coſ } g \text{ coſ. } z + \text{ſin. } g \text{ ſin. } z \text{ coſ. } (\eta-\omega).$$

His igitur duobus angulis ϕ et ψ inuentis, erit eleuatio aquae in loco Z ſupra libellam naturalem:

$$v = m(3 \text{ coſ. } \phi^2 - 1) + n(3 \text{ coſ. } \psi^2 - 1) \\ + \nu \text{ coſ. } \psi (5 \text{ coſ. } \psi^2 - 3),$$

vbi litterarum m, n et ν valores pro ratione diſtantiae tam Solis quam Lunae ex §. 14 ſunt deſumendi.

Corollarium 1.

§. 26. Quod ſi ergo locus Z in ipſo polo boreali A accipiatur, vt ſit $z=0$, ſtatim habebitur $\phi=f$ et $\psi=g$, vnde pro hoc loco erit

$$v = m(3 \text{ coſ. } f^2 - 1) + n(3 \text{ coſ. } g^2 - 1) + \nu \text{ coſ. } g (5 \text{ coſ. } g^2 - 3).$$

Sin autem punctum Z in polo auſtrali B accipiatur, fiet

$\phi =$

$$\Phi = 180° - f \text{ et } \psi = 180° - g,$$

et pro hoc loco erit

$$v = m(3\,\text{coſ.}\,f^2 - 1) + n(3\,\text{coſ.}\,g^2 - 1) - \nu\,\text{coſ.}\,g\,(5\,\text{coſ.}\,g^2 - 3),$$

vbi vltimum membrum contrario ſigno eſt affectum.

Corollarium 2.

§. 27. Si punctum Z in aequatore accipiatur, vt ſit $z = 90°$, manente longitudine indefinita $EAZ = \omega$, reperietur

$$\text{coſ.}\,\Phi = \text{ſin.}\,f\,\text{coſ.}\,(\zeta - \omega) \text{ et } \text{coſ.}\,\psi = \text{ſin.}\,g\,\text{coſ.}\,(\eta - \omega),$$

vnde eleuatio aquae erit,

$$v = m(3\,\text{ſin.}\,f^2\,\text{coſ.}\,(\zeta - \omega)^2 - 1) + n(3\,\text{ſin.}\,g^2\,\text{coſ.}\,(\eta - \omega)^2 - 1)$$
$$+ \nu\,\text{ſin.}\,g\,\text{coſ.}\,(\eta - \omega)\,(5\,\text{ſin.}\,g^2\,\text{coſ.}\,(\eta - \omega)^2 - 3).$$

Corollorium 3.

§. 28. Si Sol et Luna fuerint in coniunctione, vt ſit $\eta = \zeta$ et $g = f$, erit

$$\text{coſ.}\,\Phi = \text{coſ.}\,\psi = \text{coſ.}\,f\,\text{coſ.}\,z + \text{ſin.}\,f\,\text{ſin.}\,z\,\text{coſ.}\,(z - \omega),$$

quibus inuentis eleuatio in loco z reperietur:

$$v = (m + n)(3\,\text{coſ.}\,\Phi^2 - 1) + \nu\,\text{coſ.}\,\Phi\,(5\,\text{coſ.}\,\Phi^2 - 3).$$

Sin autem Sol et Luna fuerint in oppoſitione, erit $\eta - \zeta = 180$ et $g = 180° - f$, vnde cum ſit

$$\text{ſin.}\,\eta = -\,\text{ſin.}\,\zeta,\ \text{coſ.}\,\eta = -\,\text{coſ.}\,\zeta,$$
$$\text{ſin.}\,g = \text{ſin.}\,f, \text{ et } \text{coſ.}\,g = -\,\text{coſ.}\,f,$$

ſequitur fore

$$\text{coſ.}\,\Phi = \text{coſ.}\,f\,\text{coſ.}\,z + \text{ſin.}\,f\,\text{ſin.}\,z\,\text{coſ.}\,(\zeta - \omega) \text{ et}$$
$$\text{coſ.}\,\psi = -\,\text{coſ.}\,f\,\text{coſ.}\,z - \text{ſin.}\,f\,\text{ſin.}\,z\,\text{coſ.}\,(\zeta - \omega).$$

Sicque

Sicque patet fore coſ. $\psi = -$ coſ. Φ, ex quibus eleuatio aquae in z colligitur:

$$v = (m + n)(3 \text{ coſ. } \Phi^2 - 1) - \nu \text{ coſ. } \Phi (5 \text{ coſ. } \Phi^2 - 3).$$

Scholion.

§. 29. In hac hypotheſi commode accidit, vt pro omnibus locis Solis et Lunae quantitas conſtans c eundem valorem nanciſcatur. Sin autem mare vndique clauſum proponatur, quod tantum modicam portionem ſuperficiei Terrae occuparet, tum pro quouis ſitu luminarium valor iſtius quantitatis conſtantis c ſeorſim computari deberet, quod vtique calculum non parum moleſtum poſtularet. Plerumque autem ſufficiere poterit differentiam tantum inter eleuationem aquae in variis locis talis maris determinaſſe, ita vt tum non opus ſit veram quantitatem litterae c definire. Ceterum quoniam hoc loco mihi tantum fuit propoſitum, pro quouis ſitu Solis ac Lunae, ſtatum aequilibrii, in quo maria acquieſcere queant, ex veris principiis determinare, hoc argumentum vlterius non proſequor, neque quicquam de Phaenomenis fluxus et refluxus maris hic attingam, quippe quae iam dudum ſatis dilucide ſunt tractata.

DISQVISITIO
DE
METHODO CONSTRVENDI TABVLAS
PRO
MOTV PROIECTILIVM IN AËRE RESISTENTE.

Auctore

W. L. Krafft.

§. 1.

Poſtquam in difficillimo problemate, de proiectilium motu in hypotheſi reſiſtentiae medii, celeritatis quadrato proportionalis, ſummi Geometrae tanto ſtudio et tam felici ſucceſſu ſunt verſati, vt, quantum Analyſeos adhuc excultae ferunt vires, id, theoriam quod attinet, euolutum cenſendum ſit: quod primarium in hac re momentum eſt et ad practicum vſum omnium maxime deſideratur, ad tabularum balliſticarum non nimis operoſam conſtructionem redit, quae nec difficilis aut complicatae applicationis in ipſa praxi ſint, et experimentis, quantum opus eſt, congruant. Neque etiam practico huic vſui defuit mathematicorum ſagax induſtria; inprimis enim Ill. *Eule-*

Eulerus in Commentariis Berolinenſibus anni 1753 non plenam modo tradidit huius problematis ſolutionem, ſed ex eadem quoque *tabulas* conſtruere *balliſticas* docuit; et in iisdem Commentariis anni 1773 Ill. *Lambertus ſcalae balliſticae*, ipſis his tabulis ſuperſtructae, conſtructionem haud mediocri ingenio in lucem protulit; quo tamen egregio labore vtroque id effectum eſſe nondum conſtat, vt, balliſticam qui exercent artem, tabulas in promtu habeant, ex quibus in aëre reſiſtente, calculo non operoſiore, quam in vacuo ex tabulis *Belidorianis*, dati iactus amplitudinem computari liceat. Quamuis enim Ill. Comes *de Graeuenitz* octodecim eiusmodi tabulas ad ductum theoriae *Eulerianae* computauerit, quae, ſi ſpecies traiectoriarum inter octodecim iſtas intermediae commoda interpolatione definiri poſſent, ad omnem artis balliſticae vſum practicum ſufficere videri poſſent: tamen, ſi vel maxime iſtae tabulae facillimae ad praxin adplicationis eſſent, ad experimenta iſtas adplicanti facile patebit, iis in caſibus, in quibus traiectoria globi inter octodecim iſtarum ſpecierum binas intermedia eſt, ab experimentis ſaepe nimium diſſentire eas, atque adeo ſub certis iactuum conditionibus plane non applicabiles eſſe, non vitio theoriae, aut tabularum erroribus, ſed ob vnam interpolationis inſufficientiam. Adde, quod in ipſo tabularum a Comite *Graeuenitz* conſtructarum vſu binae amplitudinis iactus partes pro traiectoriae ramo aſcendente et deſcendente ſeparatim computandae ſint, et quod ii caſus, qui ob interpolationis inſufficientiam ex tabulis modo dictis computari non poſſunt, ſi quis eos ex ipſis formulis fundamentalibus computare vellet, calculos requirant operoſisſimos. Quae cum ita ſint, operae mihi pretium viſum

V 2 eſt,

eſt, inquirere, annon ſolutionum hoc de problemate a ſummis Geometris datarum vna alterane modo a talibus incommodis libero ad vſum practicum reuocari queant, et inter alias ſolutionem a Cel. *Bezoutio* datam hoc ſcopo ſcrutatus in aliquem conſtructionis tabularum methodum incidi, quae ſatis facili et commodo calculo exhiberi poſſunt, et ex quibus, ſimpliciſſima Logarithmorum tractatione, integram computari licet iactus ſuper plano horizontali amplitudinem, quibusque, ſi qua opus interpolatione ſit, ea tam anguſtis circumſcribatur limitibus, vt erroris nimium inde non ſit pertimeſcendum; quod igitur qualecunque tentamen, ſi quis forte eius in arte balliſtica vſus eſſe poſſit, hic exponere mihi propoſitum eſt; vnde ipſam problematis ſolutionem ad *Eulerianae* et *Bezoutianae* theoriae ductum hic, mutatis nonnullis et ſcopo meo accommodatis, praemitti neceſſe eſt.

Tab. III. Fig. 3. §. 2. Globus, cuius maſſa $= M$, et in aëre pondus $= P$, proiiciatur ex puncto A ſecundum directionem A B ſub dato ad horizontem angulo B A C $= I$ celeritate initiali $= c$, debita altitudini $= h$, vt ſit $c = 2 \sqrt{g h}$, deſignante g altitudinem, per quam grauia prope terrae ſuperficiem primo minuto ſecundo ex quiete libere delabuntur. Globi per aëtem lati ſit traiectoria A M N C, et ad curuae punctum M, ad quod peruenerit globus poſt elapſum tempus $= t$, ſit in axe horizontali A C abſciſſa A P $= x$ et applicata P M $= y$, arcus vero A M $= s$, cuius elementum $M m = ds$ inclinetur ad horizontem angulo $m M n = \Phi$, vt ſit $dy = dx . \text{tang.} \Phi$. In puncto M ſit globi ſecundum tangentem $M m$ celeritas

$$u = \frac{ds}{dt} = \frac{dx}{\cos. \Phi \, dt},$$

debita

debita altitudini $= v$, hincque $u = 2\sqrt{g v}$, et aëris in globum reſiſtentia $= \mathrm{R}$, motui eius in directione tangentis $m\mathrm{M}$ oppoſita, qua ſecundum binas directiones $n\mathrm{M}$ et $m n$ reſoluta, ſollicitabitur globus ſecundum directionem abſciſſae A P vi $= -\mathrm{R}.\cos.\Phi$ et ſecundum directionem applicatae P M vi $= -\mathrm{P} - \mathrm{R}.\sin.\Phi$; vnde, ſumto temporis elemento $d t$ conſtante, ex principiis mechanicis habetur

$$\frac{d\,d\,x}{2\,g\,d\,t^2} = \frac{-\mathrm{R}.\cos.\Phi}{\mathrm{M}} \text{ et } \frac{d\,d\,y}{2\,g\,d\,t^2} = \frac{-\mathrm{P} - \mathrm{R}.\sin.\Phi}{\mathrm{M}}.$$

Combinatis his duabus aequationibus colligitur

$$\text{tang.}\,\Phi.\,d\,d\,x - d\,d\,y = \frac{2\,g.\,\mathrm{P}.\,d\,t^2}{\mathrm{M}};$$

vnde ob $d\,y = d\,x.\,\text{tang.}\,\Phi$, hincque

$$d\,d\,y = d\,d\,x.\,\text{tang.}\,\Phi + \frac{d\,\Phi.\,d\,x}{\cos.\,\Phi^2}$$

erit $\frac{d\,\Phi.\,d\,x}{\cos.\,\Phi^2} = \frac{-2\,g\,\mathrm{P}.\,d\,t^2}{\mathrm{M}}$; ſiue

$$2\,g\,d\,t^2 = \frac{-\mathrm{M}.\,d\,\Phi.\,d\,x}{\mathrm{P}.\cos.\,\Phi^2};$$

quo valore in prima aequatione ſubſtituto erit

$$\frac{d\,d\,x}{d\,x} = \frac{\mathrm{R}.\,d\,\Phi}{\mathrm{P}.\cos.\,\Phi}.$$

Poſita nunc aëris reſiſtentia quadrato celeritatis proportionali, ſit

$$\mathrm{R} = \lambda\,u^2 = \frac{\lambda.\,d\,x^2}{\cos.\,\Phi^2\,d\,t^2};$$

quo valore ſubſtituto habebitur

$$\frac{\mathrm{P}.\,d\,t^2}{\lambda}.\frac{d\,d\,x}{d\,x^3} = \frac{d\,\Phi}{\cos.\,\Phi^3}$$

hincque integrando

$$\text{Conſt.} - \frac{\mathrm{P}\,d\,t^2}{2\,\lambda.\,d\,x^2} = \int.\frac{d\,\Phi}{\cos.\,\Phi^3},$$

vbi quidem ex praeceptis calculi integralis conſtat, eſſe

$$\int.\frac{d\,\Phi}{\cos.\,\Phi^3} = \tfrac{1}{2}\,\text{tang.}\,\Phi.\,\text{ſec.}\,\Phi + \tfrac{1}{2}\,\text{Log. hyp. tang.}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\Phi),$$

 inte-

integrali ita ſumto, vt euanefcat caſu $\Phi = 0$; et cum hinc ſit

$$\frac{dt^2}{dx^2} = \frac{2\lambda}{P}\left(\text{Conſt.} - \int \frac{d\Phi}{\text{coſ.}\,\Phi^3}\right)$$

et $\frac{dx}{dt}$ deſignet globi in traiectoriae puncto M celeritatem horizontalem, haecque fuerit initio iactus $= c.\,\text{coſ.}\,I$, oportet, vt ſit

$$c^2.\,\text{coſ.}\,I^2 = \frac{P}{2\lambda\left(\text{Conſt.} - \int \frac{d\Phi}{\text{coſ.}\,\Phi^3}\right)},$$

poſito poſt integrationem $\Phi = I$, vnde quantitatis conſtantis per ſuperiorem integrationem ingreſſae valor colligitur

$$C = \frac{P}{2\lambda\,c^2.\,\text{coſ.}\,I^2} + \tfrac{1}{2}\,\text{tang.}\,I\,\text{ſec.}\,I + \tfrac{1}{2}\,\text{Log. hyp. tang.}\,(45° + \tfrac{1}{2} I).$$

Hoc igitur quantitatis conſtantis C valore notato, erit

$$dx^2 = \frac{P.\,dt^2}{2\lambda\left(C - \int \frac{d\Phi}{\text{coſ.}\,\Phi^3}\right)};$$

vnde ob $dt^2 = \frac{-M.\,d\Phi.\,dx}{2g\,P.\,\text{coſ.}\,\Phi^2}$ habebitur

$$dx = \frac{-M.\,d\Phi}{4\lambda g\,\text{coſ.}\,\Phi^2\left(C - \int \frac{d\Phi}{\text{coſ.}\,\Phi^3}\right)};$$

adeoque

$$dy = \frac{-M.\,\text{tang.}\,\Phi.\,d\Phi}{4\lambda g.\,\text{coſ.}\,\Phi^2\left(C - \int \frac{d\Phi}{\text{coſ.}\,\Phi^3}\right)}.$$

Pro aequationum harum differentialium primi gradus integratione Cel. *Bezout* duplicem proponit approximationem, quarum vna ſtatuit $\int \frac{d\Phi}{\text{coſ.}\,\Phi^3} = a.\,\text{tang.}\,\Phi$;

altera autem $\int \frac{d\Phi}{\text{coſ.}\,\Phi^3} = \text{tang.}\,\Phi + b.\,\text{tang.}\,\Phi^3$,

vt ſit

$$a = \tfrac{1}{2}\,\text{ſec.}\,\Phi + \tfrac{1}{2}\,\text{cotang.}\,\Phi.\,\text{Log. hyp. tang.}\,(45° + \tfrac{1}{2}\Phi) \text{ et}$$

$b =$

$$b = \frac{\frac{1}{2}\,\text{tang.}\,\Phi.\ \text{ſec.}\,\Phi + \frac{1}{2}\,\text{Log. hyp. tang.}\,(45^\circ + \frac{1}{2}\Phi) - \text{tang.}\,\Phi}{\text{tang.}\,\Phi^3}$$

quorum valorum variabilitas quanta ſit, vt innoteſcat, pro vtroque ſubiunctam computaui tabulam,

Φ	a	b
0°	1, 00000	0, 16666
25°	1, 03514	0, 16161
45°	1, 14779	0, 14779
65°	1, 53433	0, 11618
75°	2, 20349	0, 08641
85°	5, 87249	0, 03730

ex qua patet, priorem a $\Phi = 0$ ad $\Phi = 45^\circ$ et vltra parum excedere vnitatem parumque variari; poſteriorem vero et ſemper eſſe perexiguam atque adeo inter limites $\Phi = 0$ et $\Phi = 65^\circ$ non niſi a valore 0, 17 ad valorem 0, 12 decreſcere; vnde has quantitates intra memoratos pro vtraque limites, approximatione parum erronea, pro conſtantibus haberi licebit.

Hac igitur tantisper hypotheſi facta, poſitoque

$$\text{tang.}\,\Phi = p;\ \frac{M}{4\lambda g} = D \text{ et } b = \frac{1}{B};$$

habebitur pro priori approximatione

$$dx = \frac{-D.\,dp}{C - ap} \text{ et } dy = \frac{-D.\,p\,dp}{C - ap},$$

hincque integrando, cum integralia caſu $\Phi = I$ euaneſcere debeant,

$$x = \frac{D}{a}\,\text{Log. hyp.}\,\frac{C - a\,\text{tang.}\,\Phi}{C - a\,\text{tang.}\,I} \text{ et}$$

$$y = \frac{C.\,D}{a^2}\left(\text{Log. hyp.}\,\frac{C - a.\,\text{tang.}\,\Phi}{C - a\,\text{tang.}\,I} - \frac{a}{C}(\text{tang.}\,I - \text{tang.}\,\Phi)\right)$$

Pro

Pro poſteriori autem approximatione, ſit aequationis cubicae $p^3 + Bp - BC = 0$ radix realis $= k$, vt ſit

$$k^3 + Bk - BC = 0; \text{ eritque}$$

$$BC - Bp - p^3 = (k - p)(B + k^2 + kp + p^2); \text{ hincque}$$

$$dx = \frac{-BD.\,dp}{(k-p)(B + k^2 + kp + p^2)} \text{ et } dy = \frac{-BD.\,p\,dp}{(k-p)(B + k^2 + kp + p^2)}$$

quae aequationes, poſito

$$p = q - \tfrac{1}{2}k; \; \frac{B}{B + 3k^2} = E \text{ et } B + \tfrac{3}{4}k^2 = f^2,$$

adhibitaque fractionis vtriusque reſolutione in fractiones partiales, in has abeunt:

$$dx = -DE.\left(\frac{q\,dq}{f^2 + q^2} + \frac{dq}{\frac{3}{2}k - q} + \frac{3k}{2}\cdot\frac{dq}{f^2 + q^2}\right)$$

$$dy = -DE.k\left(\frac{q\,dq}{f^2 + q^2} + \frac{dq}{\frac{3}{2}k - q} - (B + \tfrac{3}{2}k^2)\cdot\frac{dq}{f^2 + q^2}\right)$$

quarum, poſito breuitatis gratia $\frac{B + \frac{3}{2}k^2}{kf} = g$, colliguntur integralia

$$x = \text{Conſt.} - DE.\left(\text{Log. hyp.}\frac{\sqrt{(f^2 + q^2)}}{\frac{3}{2}k - q} + \frac{3k}{2f}\text{Arc. tang.}\frac{q}{f}\right)$$

$$y = \text{Conſt.} - DE.k\left(\text{Log. hyp.}\frac{\sqrt{(f^2 + q^2)}}{\frac{3}{2}k - q} - g.\text{Arc. tang.}\frac{q}{f}\right)$$

ſiue, poſito ad contrahendas has formulas Arc. tang. $\frac{q}{f} = X$ et ſumto Arcu N tali, vt ſit $\frac{2f}{3k} = \text{tang. } N$, habebitur

$$x = \text{Conſt.} - DE\left(\text{Log. hyp.}\frac{\text{ſin. } N}{\text{coſ. }(N + X)} + \frac{3k}{2f}X\right)$$

$$y = \text{Conſt.} - DE\,k\left(\text{Log. hyp.}\frac{\text{ſin. } N}{\text{coſ. }(N + X)} - gX\right),$$

quae integralia cum euaneſcere debeant caſu $\Phi = 1$ adeoque

que ſi fuerit $X = \text{Arc. tang.} \frac{\text{tang.} I + \frac{1}{2} k}{f}$, ponamus

$$\text{Arc. tang.} \frac{\text{tang.} I + \frac{1}{2} k}{f} = M,$$

ita, vt iſta integralia euaneſcere debeant caſu $X = M$, vnde integralia habebuntur completa atque ipſae formulae *Bezoutianae*

$$x = D\,E\,(\text{Log. hyp.} \tfrac{\text{coſ.}(N + X)}{\text{coſ.}(N + M)} + \tfrac{1 k}{2 f}(M - X))$$

$$y = D\,E\,k\,(\text{Log. hyp.} \tfrac{\text{coſ.}(N + X)}{\text{coſ.}(N + M)} - g\,(M - X)).$$

Binarum harum methodorum non niſi priorem Cel. *Bezout* ad practicum vſum applicat neque etiam hanc ipſam ad conſtructionem vsque tabularum perduxit; poſteriorem vero ob nimis complicati in ea et perquam operoſi calculi neceſſitatem priore minus ad ipſam praxin valere exiſtimat; atuero cum ex ſuperioribus conſtet, quantitatem b potiori iure, quam quantitatem a, atque adeo inter multo latiores limites valorum anguli Φ pro conſtante haberi poſſe: in eo iam labor noſter verſabitur, vt artificia inveſtigemus, quorum ope poſterior haec methodus non calculis ſolum multo concinnioribus ad propoſitum quodvis exemplum applicari, ſed ad ipſas quoque tabulas balliſticas conſtruendas reuocari queat, quarum vſus practicus non niſi ſimplicem logarithmorum tractationem requirat.

§. 3. Hunc in finem ante omnia quantitatum ex iactus conditione datarum, adeoque a iactus obliquitate I, globi pondere P, eiusque celeritate initiali c et ab aëris reſiſtentia R pendentium valores accuratius definiri oportet. Occurrit vero in ſuperioribus formulis

1) Coëfficiens λ, cum fuerit $R = \lambda u^2 = 4 \lambda g v$. Poſita iam globi diametro $= \delta$, et diametri ad peripheriam ratione $= 1 : \pi$; aequabitur, ex communi phyſicorum hypotheſi, aëris in globum reſiſtentia R ponderi cylindri aërei, cuius volumen $= \frac{\pi \delta^2 . v}{8}$ ſiue ponderi cylindri aquei, cuius volumen $= \frac{\pi \delta^2 v}{8 b}$, poſita ratione grauitatis ſpecificae aquae et aëris $= b : 1$. Si ergo δ et v in pedibus, eorumque partibus decimalibus, exprimantur, ſitque pedis aquae cubici pondus $= a$; erit $R = \frac{\pi \delta^2 . v}{8 . b} . a$; hincque $\lambda = \frac{\pi \delta^2 . a}{32 . g . b}$. Cum igitur in ſequentibus calculis pede rhenano vtamur; erit $g = 15,625$. ped.; et $a = 64$ libr. vnde cum communiter ſtatuatur $b = 850$; erit $\lambda = 0,00047309 . \delta^2$. Talis foret ipſius λ valor, ſi aëris reſiſtentiam communi huic hypotheſi exacte conſentaneam ſupponamus. Si vero ex Ill. *Euleri* ſententia, experimentis *Robinſianis* ſuperſtructa, etiam illius reſiſtentiae aëris rationem haberi oporteat, quae ex eo naſcitur, quod globus inſigni per aërem velocitate latus vacuum poſt ſe, non plane momentaneum, relinquat, totamque tantiſper ex anteriori parte preſſionem atmoſphaerae ſuſtineat; valor ipſius λ inde haud parum augebitur; vnde ponamus

$$\lambda = 0,00047309 . \mu . \delta^2$$

ita, vt in communi pro reſiſtentia aëris hypotheſi ſit $\mu = 1$; ex Ill. autem *Euleri* calculis $\mu = 3,0615$; ceterum ipſe hic ipſius μ valor experimentorum ope exactius determinari poterit.

2)

2) quantitas C, exiſtente

$C = \frac{1}{2}$ tang. I. ſec. I $+ \frac{1}{2}$ Log. hyp. tang. $(45^\circ + \frac{1}{2} I) + \frac{P}{2 \lambda c^2 . coſ. I^2}$,
cuius poſterior pars, ſubſtituto ipſius λ valore, in hunc $1056,888 . \frac{P}{\mu \delta^2 c^2 . coſ. I^2}$ abit. Huius igitur quantitatis conſtantis C valores pro ſingulis proiectionum obliquitatibus ex datis globi pondere, diametro et celeritate initiali ope ſequentis tabulae facile computate licet, cuius prima columna angulum proiectionis per quinos gradus, altera valorem

$\frac{1}{2}$ tang. I. ſec. I $+ \frac{1}{2}$ Log. hyp. tang. $(45^\circ + \frac{1}{2} I)$;

tertia denique logarithmum quantitatis $\frac{1056,888}{coſ. I^2}$ complectitur.

I.	$\frac{1}{2}$tg. I. ſec. I $+ \frac{1}{2}$ Log. tg. $(45^\circ + \frac{1}{2} I)$	Log. $\frac{1056,888}{coſ. I^2}$	B
0°	0, 000000.	3, 0240294.	. . 6,00000.
5°	0, 087600.	3, 0273410.	. . 6,01132.
10°	0, 177236.	3, 0373264.	. . 6,02773.
15°	0, 271122.	3, 0541418.	. . 6,06300.
20°	0, 371854.	3, 0780578.	. . 6,11577.
25°	0, 482694.	3, 1094780.	. . 6,18792.
30°	0, 607986.	3, 1489682.	. . 6,28183.
35°	0, 753816.	3, 1973004.	. . 6,40387.
40°	0, 929138.	3, 2555214.	. . 6,56160.
45°	1, 147793.	3, 3250594.	. . 6,76622.
50°	1, 432361.	3, 4078944.	. . 7,03476.
55°	1, 822067.	3, 5068468.	. . 7,39456.
60°	2, 390330.	3, 6260894.	. . 7,89354.
65°	3, 290396.	3, 7721328.	. . 8,60676.
70°	4, 884250.	3, 9559260.	. . 9,70608.

3)

3) quantitas B, exiſtente $B = \frac{1}{b}$, ſiue

$$B = \frac{\text{tang.}\,\Phi^3}{\frac{1}{2}\,\text{tang.}\,\Phi\,\text{ſec.}\,\Phi + \frac{1}{2}\,\text{Log. hyp. tang.}\,(45^\circ + \frac{1}{2}\Phi) - \text{tang.}\,\Phi}$$

cui Cel. *Bezout* valorem tribuit conſtantem pro tota traiectoriae extenſione, atque eum quidem, quem reuera ipſo iactus initio habet. Cum ſcilicet valor ipſius Φ in ramo traiectoriae aſcendente a $\Phi = I$ ad $\Phi = 0$ extendatur, valor autem ipſius b (§. 2) a $\Phi = 65^\circ$, qua raro ſolet maior eſſe iactuum obliquitas I, vsque ad $\Phi = 0$ non niſi quinque partibus centeſimis varietur: is ipſi valor conſtans commodiſſime tribuitur, quem in ipſa hac valoris ſui in ſe iam exigua variabilitate diutiſſime ſeruat, quique ipſe eius valor initialis eſt. Ceterum cum in hac hypotheſi valor, qui ipſi b in aequatione $dx = \frac{-\,D.\,dp}{C - p - b\,p^3}$ tanquam conſtans tribuitur, ſit minimus omnium eorum, quos quantitas b in toto traiectoriae ramo aſcendente reuera ſucceſſiue obtinet: intelligitur, iactus pro ſolo ramo aſcendente amplitudinem iſta approximatione paulo minorem vera reddi. In ramo curuae deſcendente, ſi ponatur appulſus globi, ad horizontem recidentis, obliquitas $= \zeta$, valor ipſius anguli Φ a $\Phi = 0$ ad $\Phi = -\zeta$ extenditur: hinc, cum quantitas b pro eodem angulo Φ ſiue negatiue ſiue poſitiue ſumto valorem ſeruet eundem, et valor eius initialis prope ſit inter omnes intermedius, quos in toto ramo deſcendente obtinet: amplitudo iactus pro ſolo ramo deſcendente ex hac hypotheſi computata quam proxime cum vera coincidere cenſenda eſt;

ita,

ita, vt, approximatione in practico vſu certe parum erronea cuiusque exiguus error ad paulo abbreuiandam veramiactus amplitudinem tendit, ſtatui poſſit

$$B = \frac{\text{tang. } I^2}{\frac{1}{2}\text{tang.} I.\, \text{ſec.} I + \frac{1}{2}\text{Log.hyp.tang.}(45^\circ + \frac{1}{2} I) - \text{tang.} I},$$

quos valores pro ſingulis proiectionum per quinos gradus angulis in quarta ſuperioris tabulae columna exhibuimus.

4) valor k ex aequatione cubica $k^3 + B\,k - B\,C = 0$ definiendus, pro cuius radice reali inuenienda reſolutio ad ſcopum noſtrum commodiſſime ita inſtituitur: Ponatur $k = x + y$; eritque

$x^3 + y^3 - B\,C + (x + y)(3\,xy + B) = 0$;

quem in finem ſtatuamus

$$x^3 + y^3 - B\,C = 0, \text{ et } 3\,xy + B = 0$$

vnde cum ſit $x = -\frac{B}{3y}$, valore hoc in priori aequatione ſubſtituto erit $y^6 - B\,C.\,y^3 - \frac{B^3}{27} = 0$ hinque

$$y^3 = \frac{BC}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{B^2C^2}{4} + \frac{B^3}{27}\right)};$$

ex qua aequatione inuento valore y erit $k = y - \frac{B}{3y}$.

5) Hisce igitur valoribus computatis habebitur

$D = 33,82045.\frac{P}{\mu.\,\delta^2}$; $E = \frac{D}{B + 3k^2}$.

$f = \sqrt{(B + \frac{3}{4}k^2)}$; $g = \frac{B + \frac{3}{2}k^2}{fk}$.

$N = \text{Arc. tang. } \frac{2f}{3k}$; $M = \text{Arc. tang. } \frac{\text{tang.} I + \frac{3}{2}k}{f}$

vbi quidem conſtat, cum ſit $D = \frac{P}{R}.\,v$, hanc quantitatem in pedibus rhenanis expreſſum iri.

§. 4. Hiſce praemiſſis patet

1) haberi *altitudinem iactus*, ſi integrale pro traiectoriae adplicata y ſupra inuentum ad $\Phi = 0$, quod in ſummo obtinet traiectoriae apice, extendatur, adeoque ſi ponatur $X = \text{Arc. tang.} \frac{k}{2f}$; poſito itaque hoc arcu $= H$, habitaque ratione reductionis logarithmorum hyperbolicorum ad communes tabulares et arcuum circularium in minutis primis expreſſorum ad partes radii decimales, erit

Altitudo iactus

$$= 2,30258509\, D E k \left\{ \begin{array}{l} \text{Log. tab. coſ.}\,(N + H) \\ - \text{Log. tab. coſ.}\,(N + M) \\ - 0,00012633 \cdot g\,(M - H) \end{array} \right.$$

2) Idem hic arcus H loco X in aequatione pro abſciſſa x ſupra inuenta ſubſtitutus dabit *iactus pro ſolo ramo aſcendente amplitudinem*, ſiue cum ſit

$$x = \frac{y}{k} + \frac{BD}{Kf}(M - X)$$

erit Amplitudo iactus pro ſolo ramo aſcendente

$$= \frac{\text{Altit. iactus}}{k} + 0,000290888 \cdot \frac{BD}{kf}(M - H),$$

habita ſcilicet ratione reductionum modo dictarum.

3) haberi *totam iactus amplitudinem*, ſi integrale pro abſciſſa x ſupra inuentum ad $\Phi = -\zeta$ extendatur, adeoque ſi ponatur

$$X = \text{Arc. tang.} \frac{\frac{1}{2}k - \text{tang.}\,\zeta}{f}.$$

Poſito itaque hoc aarcu $= Z$, cum idem hic angulus

gulus in aequatione pro adplicata y loco X ſubſtitutus efficere debeat $y = 0$; pro definiendo hoc arcu Z ſequens habebitur aequatio:

$$\text{Log. hyp.} \frac{\text{coſ.}(N + Z)}{\text{coſ.}(N + M)} - g(M - Z) = 0.$$

ſiue, reductione modo dicta inſtituta, poſitoque

$$M - Z = V \text{ et } N + M = R, \text{ erit}$$

$$\text{Log tab.coſ.}(R - V) - 0{,}000126331.g.V = \text{Log.tab.coſ.}R;$$

ex qua aequatione inuento angulo V in minutis primis expreſſo, erit

$$\text{Amplitudo tota iactus} = 0{,}000290888.\frac{B.V.D}{fk}.$$

4) haberi, inuento arcu V, *angulum* ζ, *ſub quo globus ad horizontem recidit*; cum enim ſit $Z = M - V$; erit

$$\text{tang.}(M - V) = \frac{\frac{1}{2}k - \text{tang.}\zeta}{f}; \text{ adeoque}$$

$$\text{tang.}\zeta = \tfrac{1}{2}k + f.\text{tang.}(V - M).$$

5) haberi, *celeritatem globi in ſummitate traiectoriae* et inuento angulo ζ, *celeritatem appulſus globi adhorizontem recidentis*: cum enim in traiectoriae puncto quocunque M fuerit (§. 2.) globi celeritas

$$u = \frac{dx}{\text{coſ.}\Phi.dt} \text{ et } \frac{dx^2}{dt^2} = \frac{P}{2\lambda(C - \int.\frac{d\Phi}{\text{coſ.}\Phi^3})}$$

erit

$$u^2 = \frac{P}{2\lambda.\text{coſ.}\Phi^2(C - \int.\frac{d\Phi}{\text{coſ.}\Phi^3})};$$

vnde poſito $\Phi = 0$, quo caſu $\int.\frac{d\Phi}{\text{coſ.}\Phi^3}$ euaneſcit (§. 2.); erit celeritas globi in vertice traiectoriae $= \sqrt{\frac{P}{2\lambda C}}$;

et

et globi ad horizontem impellentis celeritas

$$= \sqrt{\frac{P}{2\lambda . \operatorname{coſ}.\zeta^2 (C + \frac{1}{2} \operatorname{tang} \zeta \operatorname{ſec}. \zeta + \frac{1}{2} \operatorname{Log. hyp} \operatorname{tg} (45^\circ + \frac{1}{2}\zeta))}}.$$

§ 5. Antequam huius calculi ſatis operoſi compendium exponimus: cum exemplo illuſtraſſe iuuabit. Comparemus hunc in finem methodum hic traditam cum tabulis *Eulerianis*:

Exemplum.

Globus, cuius diameter 6 poll. rhen. et pondus $= \frac{9}{10}$ ponderis pedis aquae cubici rhenani, proiicitur ſub angulo 45° celeritate initiali $= 485, 7$. ped. rhen (*). Quaeritur amplitudo iactus ſuper plano horizontali.

Cum pondus pedis aquae cubici rhenani ſupra poſuerimus $= 64$. libr. erit pro hoc exemplo

$P = 57, 6$; $\delta = 0, 5$; $c = 485, 7$; $I = 45°$

et in Ill. *Euleri* hypotheſi pro reſiſtentia aëris erit

$\mu = 3, 0615$.

Hiſce poſitis, habebitur

Ex tabula §. 3. . . .	$B = 6, 76622.$
Ex eadem tabula . . .	$C = 1, 82212.$
$33, 82045 \cdot \frac{P}{\mu \delta^3}$ $=\!=$	$D = 2545$. ped. rhen.

Ex

(*) In Comm. Berl. ſupra allegatis Ill. *Eulerus* hoc exemplum ex ſuis tabulis computauit; ibique dicit, eſſe globi celeritatem initialem $= 1, 7222525 \cdot \sqrt{2 \alpha g c}$; $\alpha = 1$; $g = 15, 625$ ped. rhen. et $c = 2544$. ped. rhen.

Hinc ergo prodit celeritas iſta initialis $= 485, 7$. ped. rhen.

Ex reſolutione aeq. cubicae		$k = 1,40884.$
$\frac{B}{B + 3k^2}$	$=$	$E = 0,53190.$
$\sqrt{(B + \frac{3}{4}k^2)}$	$=$	$f = 2,87312.$
$\frac{B + \frac{3}{2}k^2}{kf}$	$=$	$g = 2,40712.$
Arc. tang. $\frac{2f}{3k}$	$=$	$N = 53° \; 39' \; 52''$
Arc. tang. $\frac{\text{tang. } I + \frac{1}{2}k}{f}$	$=$	$M = 30° \; 40' \; 39''.$
$N + M$	$=$	$R = 84° \; 20' \; 31''.$
Arc. tang. $\frac{k}{2f}$	$=$	$H = 13° \; 46' \; 32''.$
hinc		$N + H = 67° \; 26' \; 24''.$
		$M - H = 16° \; 54' \; 7''.$

ex quibus pro angulo V colligitur aequatio

$$\text{Log. tab. coſ.} (R - V) - 0,00030409. \; V = 8,9938380.$$

cui ſatisfacit angulus $V = 50° \; 48'. \; 6 = 3048,6.$

Stabilitis hiſce elementis calculi, ex ſuperioribus formulis prodit

		Ex tab. *Eul.*
Altitudo iactus - - - -	1237. ped. rhen.	1235. ped. rh.
Amplit. iactus pro ramo aſc.	2133. ——	2139. ——
Amplitudo iactus tota - -	3774. ——	3779. ——
Celeritas globi recidentis -	276. ——	276. ——
Celeritas globi in vertice -	209. ——	209. ——
Angulus recidentiae globi -	60° 22'.	60° 13'.

§. 6. Quantumuis vero haec methodus cum experimentis conſentiret: valores tamen k, f et g vna cum

angulis N et M; et aequationis potiſſimum termino logarithmico et arcu circulari complicatae reſolutio calculos requirunt operoſiores, quam vt in ipſa praxi ad iſtas formulas recurri poſſit; neque magis patet, quomodo hae formulae, in quibus modo memoratae quantitates, a pondere partim et diametro globi, partim a iactus obliquitate et celeritate initiali pendentes, diuerſimode inter ſe complicantur, ad conſtructionem tabularum reuocari queant; id quod ſequenti commodiſſime fieri ratione reperi.

Totus ſcilicet calculus pro dato quolibet iactu inſtituendus a valore k, per quem quantitates f et g vna cum angulis N et M determinantur, (§. 3.) adeoque ab aequatione cubica $k^3 + B k - B C = 0$, in qua data ſunt B et C per conditionem iactus, primario pendet; cuius aequationis reſolutionem §. 3. datam iam ſequenti modo adornari conueniet:

Sumto angulo 2ω tali, vt ſit $\frac{B^2 C^2}{4} = \frac{B^3}{27} . \overline{\text{tang.}\ 2\omega}^2$, ſiue

$$\text{tang.}\ 2\omega = \frac{3\sqrt{3}}{2} . \frac{C}{\sqrt{B}},$$

erit $y^3 = \frac{B . \sqrt{B}}{3\sqrt{3}} (\text{tang.}\ 2\omega + \text{ſec.}\ 2\omega) = \frac{B\sqrt{B}}{3\sqrt{3}} \text{tang.}\ (45^\circ + \omega)$

adeoque

$$k = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{3}} . \left(\sqrt[3]{\text{tang.}\ (45^\circ + \omega)} - \frac{1}{\sqrt[3]{\text{tang.}\ (45^\circ + \omega)}} \right).$$

Si igitur ſumatur angulus 2ψ talis, vt ſit

$$\sqrt[3]{\text{tang.}\ (45^\circ + \omega)} = \text{tang.}\ (45^\circ + \psi)$$

erit $k = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{3}} . (\text{tang.}\ (45^\circ + \psi) - \text{cotang.}\ (45^\circ + \psi))$

ſiue $k = \frac{2\sqrt{B}}{\sqrt{3}} . \text{tang.}\ 2\psi$.

Quare

Quare ob $k^2 + B k - B C = 0$, habebitur

$$\frac{C}{\sqrt{B}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} . \text{tang. } 2\psi \left(\frac{3 + \overline{\text{ſin. } 2\psi}^2}{\overline{\text{coſ. } 2\psi}^2}\right)$$

vnde ſi pro ſingulis valoribus anguli 2ψ a $2\psi = 0$ ad $2\psi = 90°$ quaerantur valores $\frac{C}{\sqrt{B}}$; viciſſim ex quantitatibus B et C per iactus conditionem datis angulus 2ψ correſpondens definiri poterit; per quem angulum omnes quantitates ad abſoluendum calculum neceſſariae determinantur; erit enim

$$k = \frac{2\sqrt{B}}{\sqrt{3}} \text{ tang. } 2\psi; \qquad \text{tang. N} = \frac{1}{\sqrt{3} . \text{ſin. } 2\psi};$$

$$f = \frac{\sqrt{B}}{\text{coſ. } 2\psi}; \qquad \text{tang. M} = \frac{\text{tang. I coſ. } 2\psi}{\sqrt{B}} + \frac{\text{ſin. } 2\psi}{\sqrt{3}}$$

ſiue

$$g = \frac{\sqrt{3}}{2}(\text{ſin.} 2\psi + \text{coſec.} 2\psi); \text{ tang. M} = \frac{\text{ſin.} (\eta + 2\psi)}{\sqrt{3} . \text{coſ. } \eta}$$

poſito tang. $\eta = \frac{\sqrt{3} . \text{tang. I}}{\sqrt{B}}$.

Cum igitur hinc ſit (§. 4.)

$$0,000126331 . g = 0,000109406 . (\text{ſin. } 2\psi + \text{coſec. } 2\psi)$$

$$0,000290888 . \frac{B}{f k} = 0,000251916 . \text{ coſ. } 2\psi . \text{cotang. } 2\psi$$

erit, poſito horum valorum priori $= \Delta$, poſteriori $= \Pi$, reſoluenda aequatio

$$\text{Log. coſ. } (R - V) - \Delta V = \text{Log. coſ. R.}$$

et tota iactus amplitudo $= \Pi . V . D$. ped rhen.; vbi logarithmi tabulares et arcus circulares in minutis primis expreſſi intelliguntur.

Cum igitur in conſtruendis ad hanc methodum tabulis balliſticis pro ſingulis valoribus $\frac{C}{\sqrt{B}}$ ex iactus conditione datis angulos 2ψ reſpondentes vna cum angulis N et valoribus Δ et Π noſſe oporteat: iſta elementa ſequenti tabula exhibuimus:

$\frac{c}{\sqrt{B}}$	2 ψ	N	Δ	Π
0,000000	0°.	90°. 0'. 0''.	∞	∞
0,020117	1.	88. 16. 7.	0,006271	0,014430
0,040388	2.	86. 32. 27.	0,003139	0,007209
0,060737	3.	84. 49. 13.	0,002096	0,004800
0,081271	4.	83. 6. 39.	0,001576	0,003594
0,102054	5.	81. 24. 56.	0,001265	0,002868
0,123152	6.	79. 44. 16.	0,001058	0,002384
0,144629	7.	78. 4. 51.	0,000911	0,002036
0,166556	8.	76. 26. 50.	0,000802	0,001775
0,189003	9.	74. 50. 22.	0,000716	0,001571
0,212045	10.	73. 15. 37.	0,000649	0,001407
0,235758	11.	71. 42. 42.	0,000594	0,001272
0,260224	12.	70. 11. 43.	0,000549	0,001159
0,285530	13.	68. 42. 46.	0,000511	0,001063
0,311762	14	67. 15. 55.	0,000478	0,000980
0,339020	15.	65. 51. 14.	0,000451	0,000908
0,367404	16.	64. 28. 46.	0,000427	0,000845
0,397024	17.	63. 8. 32.	0,000406	0,000788
0,427997	18.	61. 50. 34.	0,000388	0,000737
0,460448	19.	60. 34. 53.	0,000371	0,000691
0,494511	20.	59. 21. 28.	0,000357	0,000651
0,530333	21.	58. 10. 18.	0,000344	0,000613
0,568069	22.	57. 1. 23.	0,000333	0,000578
0,607892	23.	55. 54. 40.	0,000322	0,000546
0,649986	24.	54. 50. 9.	0,000313	0,000517
0,694554	25.	53. 47. 46.	0,000305	0,000490

$\frac{C}{\sqrt{B}}$	2 ψ	N	Δ	Π
0,694554	25°.	53°.47′.46″.	0,000305	0,000490
0,741814	26.	52. 47. 29.	0,000297	0,000464
0,792009	27.	51. 49. 15.	0,000291	0,000441
0,845402	28.	50. 53. 1.	0,000284	0,000419
0,902279	29.	49. 58. 45.	0,000279	0,000397
0,962963	30.	49. 6. 24.	0,000273	0,000378
1,027800	31.	48. 15. 53.	0,000269	0,000359
1,097179	32.	47. 27. 10.	0,000264	0,000341
1,171529	33.	46. 40. 12.	0,000260	0,000325
1,251321	34.	45. 54. 55.	0,000257	0,000309
1,337083	35.	45. 11. 16.	0,000253	0,000294
1,4 9400	36.	44. 29. 13.	0,000251	0,000280
1,528933	37.	43. 48. 41.	0,000248	0,000267
1,636390	38.	43. 9. 38.	0,000245	0,000254
1,752610	39.	42. 32. 2.	0,000242	0,000242
1,878505	40.	41. 55. 48.	0,000240	0,000230
2,015107	41.	41. 20, 55.	0,000238	0,000219
2,163577	42.	40. 47. 20.	0,000236	0,000208
2,325238	43.	40. 14. 59.	0,000235	0,000197
2,501580	44.	39. 43. 51.	0,000233	0,000188
2,694300	45.	39. 13. 53.	0,000232	0,000178
2,905335	46.	38. 45. 3.	0,000231	0,000169
3,136894	47.	38. 17. 19.	0,000230	0,000160
3,391518	48.	37. 50 37.	0,000229	0,000152
3,672122	49.	37. 24. 57.	0,000228	0,000144
3,982077	50.	37. 0. 16.	0,000227	0,000136

$\frac{C}{\sqrt{B}}$	2 ψ	N	Δ	Π
3,982077	50°.	37° 0′. 16″.	0,000227	0,000136
4,325285	51.	36. 36. 33.	0,000226	0,000128
4,706283	52.	36. 13. 44.	0,000225	0,000121
5,130371	53.	35. 51. 50.	0,000224	0,000114
5,603748	54	35. 30 48.	0,000224	0,000107
6,133583	55.	35. 10. 36.	0,000223	0,000101
6,728935	56.	34. 51. 13.	0,000223	0,000095
7,399640	57.	34. 32. 38.	0,000222	0,000089
8,158072	58.	34. 14. 49.	0,000222	0,000083
9,019152	59.	33. 57. 45.	0,000221	0,000078
10,00000	60.	33. 41. 24.	0,000221	0,000073
11,12280	61.	33. 25. 46.	0,000221	0,000068
12,41367	62.	33. 10. 49.	0,000220	0,000063
13,90508	63.	32. 56. 32.	0,000220	0,000058
15,63738	64.	32. 42. 54.	0,000220	0,000054
17,66041	65.	32. 29. 55.	0,000220	0,000050
20,03800	66.	32. 17. 33.	0,000220	0,000046
22,85070	67.	32. 5. 47.	0,000219	0,000042
26,20214	68.	31. 54. 37.	0,000219	0,000038
30,22725	69.	31. 44. 1.	0,000219	0,000035
35,10336	70.	31. 34. 0.	0,000219	0,000031
41,06662	71.	31. 24. 32.	0,000219	0,000028
48,43659	72.	31. 15. 37.	0,000219	0,000025
57,65234	73.	31. 7. 14.	0,000219	0,000022
69,32776	74.	30. 59. 23.	0,000219	0,000020
84,33902	75.	30. 52. 3.	0,000219	0,000018

$\frac{C}{VB}$	2 ψ	N	Δ	Π
84,33902	75°.	30°. 52′. 3″.	0,000219	0,000018
103,9645	76.	30. 45. 13.	0,000219	0,000015
130,1184	77.	30. 38. 54.	0,000219	0,000013
165,7513	78.	30. 33. 44.	0,000219	0,000011
215,5694	79.	30. 27. 44.	0,000219	0,000009
287,3841	80.	30. 22. 52.	0,000219	0.000008
394,7896	81.	30. 18. 30.	0,000219	0,000006
562,8426	82.	30. 14. 35.	0,000219	0,000005
841,1230	83.	30. 11. 9.	0,000219	0,000004
1336,998	84.	30. 8. 11.	0,000219	0,000003
2312,270	85.	30. 5. 41.	0,000219	0,000002
4519,252	86.	30. 3. 38.	0,000219	0,000001
10718,01	87.	30. 2. 2.	0,000219	0,000001
36187,07	88.	30. 0. 54.	0,000219	0,000000
289562,8	89.	30. 0. 14.	0,000219	0,000000
∞	90.	30. 0. 0.	0,000219	0,000000

Tabula pro angulo η.

I	η	I	η	I	η
0°.	0°. 0′. 0″.	25°.	17°. 59′. 18″.	50°.	37°. 53′ 31″.
5.	3. 32. 15.	30.	21. 45. 4.	55.	42. 17. 29.
10.	7. 5. 27.	35.	25. 36. 22.	60.	46. 52. 35.
15.	10. 40. 23.	40.	29. 34. 9.	65.	51. 41. 50.
20.	14. 18. 3.	45.	33. 39. 30.	70.	56. 47. 17.

§. 7.

§. 7. Vſum huius methodi tabulaeque, quam praemiſimus, ſubſidiariae ſequentia illuſtrabunt exempla:

Exempl. I. Pro iactu §. 5. dato quaeritur amplitudo ſuper plano horizontali.

Cum pro hoc iactu ſit - - - - $\frac{c}{\sqrt{B}} = 0,700491.$
erit ex praecedenti tabula - - - $2\psi = 25°.\ 7'.\ 32''.$
$N = 53.\ 40.\ 12.$
$\Delta = 0,000304.$
$\Pi = 0,000487.$

et cum ſit ex praecedenti tabula - $\eta = 33°.\ 39'.\ 30''.$
erit - - $M = 30.\ 40.\ 36.$
adeoque - - $R = 84.\ 20.\ 48.$

vnde ex reſolutione aequationis logarithmicae, qui vnicus eſt calculus operoſior, reperitur $V = 3049$. min. prim. ex quo, cum ſit, vt ante - - $D = 2545$. ped. rhen. erit tota iactus amplitudo, vt ante, $= 3775$. ped. rhen.

Exempl. II. Bombarda, cuius diameter 1. ped. rhen. et pondus $= 138$. libr. quarum 64 efficiunt pondus pedis aquae cubici rhen. proiicitur ſub angulo 15°. celeritate initiali $= 400$. ped. rhen. Quaeritur amplitudo iactus ſuper plano horizontali.

Erit ergo pro hoc iactu

$$P = 138;\ \delta = 1;\ c = 400;\ I = 15°.$$

et ſtatuamus, vt ante, $\mu = 3,0615.$

Hinc

Hinc habebitur

Ex tabula §. 3. - - $B = 6,06300.$

et $C = 0,59025.$

Porro habebitur - - - $D = 1524,4.$ ped. rhen.

Hinc cum ſit - - - $\frac{C}{VB} = 0,239713.$

erit ex tabula §. 6. - - - $2\psi = 11^\circ.\ 9'.\ 42''.$

$N = 71.\ 28.\ 0.$

$\Delta = 0,000587.$

$\Pi = 0,001254.$

Et cum ſit ex eadem tabula - $\eta = 10^\circ.\ 40'.\ 23''.$

erit - - $M = 12.\ 20.\ 45.$

adeoque - - $R = 83.\ 48.\ 45.$

quibus inuentis, ex reſolutione aequationis logarithmicae prodit - - - - $V = 14^\circ.\ 49'$,

$= 889.$

hincque tota iactus amplitudo $=$ 1699. 4 ped. rhen.

Ex tabulis vero Eulerianis $=$ 1719. —— ——

et ex ipſa experientia Belidorii $=$ 1705. —— ——

ita, vt amplitudo ex ſuperiori methodo pro hoc iactu computata non niſi 6 pedibus minor ſit ea, quam Belidorius experimento reperit, a quo tabulae Eulerianae itidem non niſi 14. pedibus in exceſſu diſcrepant.

§. 8. Quamuis vero etiamnum, inprimis ob aequationis termino logarithmico et arcu circulari complicatae reſolutionem, nimis operoſi ſint hi calculi, quam vt promtus eorum in ipſa praxi et expeditus eſſe vſus queat: tamen, quod praecipuum eſt, methodus hic expoſita facili negotio ad tabularum balliſticarum conſtructionem applicari poteſt, quarum vſus non niſi ſimpliciſſimam Logarithmorum tractationem requirit, quod vt exemplo

pateſcat, conſtruendae ſint tales tabulae pro angulo proiectionis 45°; ita, vt ſit

$$tang. M = 0,69363. ſin. (33°. 39'. 30'' + 2\,\psi).$$

Cum igitur iam angulus $R = N + M$ cum valoribus Δ et Π vnice ab angulo $2\,\psi$ pendeat; pro ſingulis angulis $2\,\psi$ habebitur aequatio pro definiendo valore V, qui in $\Pi\,D$ ductus dabit amplitudinem iactus, cui datus iſte angulus $2\,\psi$ competit; neque vero aequationum harum logarithmis et arcubus circularibus complicatarum reſolutiones multum negotii faceſſunt, cum ſcilicet, angulo $2\,\psi$ per ſingulos gradus creſcente, etiam angulus R et valor Δ, adeoque tota iſta aequatio non niſi paruas ſubeant variationes; harum aequationum reſoluta prima, etiam ſubſequens facili labore reſoluitur. Neque etiam opus eſt, calculos inde a valore $2\,\psi = 0$ incipi, cum enim ſit

$$C = \tfrac{1}{2}\, tang. I\, ſec. I + \tfrac{1}{2}\, Log.\, hyp.\, tang. (45°. + \tfrac{1}{2} I)$$
$$+ \frac{p}{2\,\lambda.\, c^2.\, coſ. I^2} \quad (§.\ 2.);$$

minimus poſſibilis ipſius C valor erit

$$\tfrac{1}{2}\, tang. I.\, ſec. I + \tfrac{1}{2}\, Log.\, hyp.\, tang. (45° + \tfrac{1}{2} I)$$

poſito ſcilicet $\frac{p}{c^2} = 0$. adeoque aſſumta celeritate globi initiali $= \infty$; quo poſito erit $B = c^{\frac{tang. I^2}{C - tang. I}}$; hincque $\frac{C}{\sqrt{B}} = \frac{tang. I (B + tang. I^2)}{B. \sqrt{B}}$. Caſu ergo $I = 45°$; minimus poſſibilis ipſius $\frac{C}{\sqrt{B}}$ valor erit $= 0,441256$; cui in tabula §. 6. reſpondet angulus $2\,\psi = 18°. 24'. 46''$; a quo igitur ipſius $2\,\psi$ valore tabulam inchoari oportet. Ceterum cum ex quantitate $\frac{C}{\sqrt{B}}$ per conditionem iactus et aſſumtam pro aëris reſiſtentia hypotheſin data colligatur angulus $2\,\psi$ dato iactui competens; argumentum tabulae erit $\frac{C}{\sqrt{B}}$ ſiue ſimpliciter C, ob B conſtans in tota tabula; quare, cum dato valore $\frac{C}{\sqrt{B}}$ detur etiam valor $\frac{p}{c^2. B^2}$ (§. 3.); conſtitui pote-

poterit $\frac{P}{c^2 . \delta^2}$ argumentum totius tabulae. Porro cum ſit tota iactus amplitudo

$$\Pi V D = 33,82045 . \Pi . V . \frac{P}{\delta^2 . \mu};$$

coëfficiens $33,82045 . \frac{\Pi . V}{\mu}$ in tabula exhibebitur, qui in $\frac{P}{\delta^2}$ ductus totam dabit iactus amplitudinem. Hisce principiis ſuperſtructa eſt ſequens tabula, in qua Euleriana pro aëris reſiſtentia hypotheſis eſt aſſumta, ita, vt poſuerimus $\mu = 3,0615$. Ceterum pro vſu eiusmodi tabularum notari oportet, ſi celeritas globi initialis non ex theoria, aut penduli ope, aliave ab aëris reſiſtentia independente methodo, ſed ex iactus cuiusdam probatorii amplitudine quaerenda ſit; tum in ea definienda eandem aſſumi debere, quae in tabulis, pro aëris reſiſtentia hypotheſin, ſi deinceps, celeritate globi initiali ex iactu probatorio cognita, iisdem his tabulis ad computandas eiusdem globi eadem pulueris pyrii quantitate proiecti ſub aliis proiectionum angulis amplitudines vti velimus. At vero etiam ad definiendam ex iactus probatorii amplitudine celeritatem globi initialem tabulae noſtrae facilem admittunt inuerſionem et ad formam in praxi percommodam redigi ſe patiuntur; poſita enim iactus amplitudine $= \Omega$; cum ſit

$$\Omega = \Pi V D = 33,82045 . \frac{\Pi . V}{\mu} . \frac{P}{\delta^2}; \text{ erit}$$

$$\frac{\Omega . \delta^2}{P} = 33,82045 . \frac{\Pi . V}{\mu};$$

haec vero quantitas in tabula eſt exhibita, eiusque eſt argumentum $= \frac{P}{\delta^2 c^2}$; poſito itaque hoc argumento $= A$; erit $c^2 = \frac{P}{\delta^2 . A}$; facili ergo labore conſtruitur noua tabula, cuius erit argumentum $= \frac{\Omega . \delta^2}{P}$, et quae exhibet valores reſpondentes $\frac{1}{A}$, qui in $\frac{P}{\delta^2}$ ducti dabunt quadrata celeritatum initialium.

Tabulam itaque pro angulo proiectionis 45°. ſub duplici hac forma exempli cauſſa hic exhibebimus:

Tabula Prima

pro inuenienda amplitudine iactus globi ſub angulo 45° ſuper plano horizontali in aëre reſiſtente proiecti, ex datis pondere, diametro et celeritate initiali globi.

Argumentum:

Pondus globi diuiſum per productum quadratorum diametri et celeritatis initialis globi.

Argumentum	Log. Coëfficient.	Log. Interpolat.
0, 000000.	∞	
0, 000072.	1, 6189926.	4, 8792860.
0, 000201.	1, 5027108.	4, 5793437.
0, 000336.	1, 4264457.	4, 3942458.
0, 000478.	1, 3650393.	4, 2496433.
0, 000628.	1, 3119830.	4, 1323637.
0, 000786.	1, 2640577.	4, 0255108.
0, 000954.	1, 2197464.	3, 9304917.
0, 001132.	1, 1780971.	3, 8400731.
0, 001322.	1, 1384523.	3, 7589111.
0, 001523.	1, 1004050.	3, 6805007.
0, 001737.	1, 0635417.	3, 6045008.
0, 001965.	1, 0276924.	3, 5282166.

Argu-

Argumentum	Log. Coëfficient.	Log. Interpolat.
0, 002210.	0, 9926262.	3, 4585696.
0, 002471.	0, 9581521.	3, 3877717.
0, 002751.	0, 9241544.	3, 3176442.
0, 003052.	0, 8905389.	3, 2501518.
0, 003375.	0, 8571832.	3, 1820652.
0, 003723.	0, 8240147.	3, 1151922.
0, 004098.	0, 7909457.	3, 0481934.
0, 004503.	0, 7579166.	2, 9805222.
0, 004941.	0, 7249365.	2, 9160762.
0, 005415.	0, 6917319.	2, 8481377.
0, 005930.	0, 6584242.	2, 7803314.
0, 006489.	0, 6250284.	2, 7134312.
0, 007098.	0, 5913351.	2, 6455244.
0, 007762.	0, 5573717.	2, 5775029.
0, 008488.	0, 5230226.	2, 5069847.
0, 009283.	0, 4884042.	2, 4378433.
0, 010155.	0, 4533155.	2, 3665981.
0, 011115.	0, 4177526.	2, 2950707.
0, 012172.	0, 3816878.	2, 2218495.
0, 013340.	0, 3450807.	2, 1484919.
0, 014633.	0, 3078164.	2, 0730490.
0, 016068.	0, 2699125.	1, 9965894.
0, 017666.	0, 2312560.	1, 9181003.
0, 019450.	0, 1918490.	1, 8386378.
0, 021446.	0, 1516046.	1, 7576477.

Argumentum	Log. Coëfficient.	Log. Interpolat.
0, 023689.	0, 1103849.	1, 6732118.
0, 026216.	0, 0683041.	1, 5885787.
0, 029073.	0, 0251172.	1, 5003306.
0, 032317.	9, 9807449.	1, 4106483.
0, 036012.	9, 9352622.	1, 3185320.
0, 040242.	9, 8884237.	1, 2228779.
0, 045106.	9, 8402164.	1, 1259231.
0, 050725.	9, 7903461.	1, 0247555.
0, 057251.	9, 7387794.	0, 9185863.
0, 064873.	9, 6855691.	0, 8104641.
0, 073832.	9, 6303271.	0, 6993220.
0, 084428.	9, 5728717.	0, 5810869.
0, 097054.	9, 5130536.	0, 4584448.
0, 112219.	9, 4507057.	0, 3307788.
0, 130590.	9, 3855174.	0, 1978331.
0, 153056.	9, 3170620.	0, 0569290.
0, 180822.	9, 2451811.	9, 9097618.
0, 215542.	9, 1692642.	9, 7525511.
0, 259530.	9, 0891203.	9, 5879731.
0, 316085.	9, 0037972.	9, 4105652.
0, 390024.	8, 9130060.	9, 2233404.
0, 488559.	8, 8153747.	9, 0208556.
0, 622805.	8, 7099855.	8, 8012291.
0, 810495.	8, 5955830.	8, 5573610.
1, 081057.	8, 4719390.	8, 3027439.

Argu-

Argumentum	Log. Coëfficient.	Log. Interpolat.
1, 485707.	8, 3328347.	8, 0093381.
2, 118846.	8, 1775489.	7, 6793016.
3, 167268.	8, 0017315.	7, 3023746.
5, 035475.	7, 7987962.	6, 8885581.
8, 709814.	7, 5610079.	6, 3293455.
17, 024616.	7, 2703947.	5, 6634545.
40, 378427.	6, 8963717.	4, 7614436.
136, 333125.	6, 3692481.	3, 3319086.
1090, 985747.	5, 4683489.	
∞ . .	— ∞	

In conſtruenda hac, exempli loco, tabula, ab initiali ſupra dicto valore $2\,\psi = 18^\circ\ 24'\ 46''$ per ſingulos anguli $2\,\psi$ gradus *integros* ſumus progreſſi. At vero, pro ipſa praxi balliſtica ſi conſtruendae forent tales tabulae, ab initiali valore anguli $2\,\psi$, pro quo ſit tabulae argumentum $= 0$, ad gradum proximum, per ſingula huius anguli minuta prima progredi oportebit; et ab eo inde gradu, vsque dum logarithmus interpolatorius ſatis decreverit, ad ſingulos anguli $2\,\psi$ ſemigradus tabulam extendi conueniet. Ceterum cum in hac tabula ſuppoſitum ſit $\mu = 3,0615$; ea, quae de definienda ex iactu quodam probatorio celeritate globi initiali modo notata ſunt, huic de aëris reſiſtentia hypotheſi in tabulae ad experimenta applicatione conformari neceſſe eſt.

Tabula

Tabula Secunda.

pro inueniendâ celeritate initiali globi ſub angulo 45° ſuper plano horizontali in aëre reſiſtente ad datam diſtantiam proiiciendi, ex datis pondere et diametro globi.

Argumentum:

Diſtantia ducta in quadratum diametri globi et diuiſa per pondus globi.

Argumentum	Log. Coëfficient.	Log. Interpolat.
∾	∾	
41, 590358.	4, 1408267.	2, 9568733.
31, 820781.	3, 6975865.	2, 5922939.
26, 695974.	3, 4741813.	2, 4012377.
23, 176093.	3, 3207831.	2, 2734178.
20, 510814.	3, 2021780.	2, 1757953.
18, 367821.	3, 1043620.	2, 0989235.
16, 586180.	3, 0203151.	2, 0359928.
15, 069438.	2, 9460186.	1, 9828173.
13, 754738.	2, 8789455.	1, 9378059.
12, 601000.	2, 8174086.	1, 8977313.
11, 57555[illegible].	2, 7602241.	1, 8633798.
10, 658410.	2, 7065202.	1, 8326626.

Argu-

Argumentum	Log. Coëfficient.	Log. Interpolat.
9, 831644.	2, 6556463.	1, 8048533.
9, 081387.	2, 6070940.	1, 7799675.
8, 397586.	2, 5604616.	1, 7576723.
7, 772110.	2, 5154270.	1, 7371602.
7, 197525.	2, 4717227.	1, 7185217.
6, 668295.	2, 4291267.	1, 7013584.
6, 179391.	2, 3874468.	1, 6855882.
5, 726860.	2, 3465302.	1, 6720288.
5, 308070.	2, 3062270.	1, 6570991.
4, 917360.	2, 2664149.	1, 6447176.
4, 554328.	2, 2269833.	1, 6348212.
4, 217240.	2, 1878329.	1, 6231830.
3, 902430.	2, 1488702.	1, 6136548.
3, 608873	2, 1100114.	1, 6037421.
3, 334438.	2, 0711773.	1, 5965394.
3, 078961.	2, 0322923.	1, 5877819.
2, 839982.	1, 9932855.	1, 5805496.
2, 616692	1, 9540863.	1, 5740611.
2, 408173.	1, 9146279.	1, 5674366.
2, 213506.	1, 8748430.	1, 5607676.
2. 031498.	1, 8346645.	1, 5561403.
1, 861712.	1, 7940252.	1, 5495701.
1, 703162.	1, 7528560.	1, 5465081.
1, 555423.	1, 7110875.	1, 5406296.
1, 417766.	1, 6686571.	1, 5369453.

Argumentum	Log. Coëfficient.	Log. Interpolat.
1, 289392	1, 6254566.	1, 5337774.
1, 170318.	1, 5814386.	1, 5283827.
1, 059531.	1, 5365088.	1, 5276647.
0, 956632.	1, 4905661.	1, 5227966.
0, 861514.	1, 4435461.	1, 5205105.
0, 773435.	1, 3953128.	1, 5182633.
0, 692176.	1, 3457651.	1, 5153530.
0, 61-086.	1, 2947784.	1, 5127799.
0, 547998.	1, 2422140.	1, 5110987.
0, 484807.	1, 1879351.	1, 5091180.
0, 426901.	1, 1317628.	1, 5069850.
0, 374000.	1, 0735156.	1, 5051680.
0, 325877.	1, 0129862.	1, 5037276.
0, 282297.	0, 9499348.	1, 5021859.
0, 242950.	0, 8840921.	1, 5014074.
0, 207521.	0, 8151497.	1, 5009885.
0, 175866.	0, 7427479.	1, 5003458.
0, 147660.	0, 6664668.	1, 4997030.
0, 122778.	0, 5858128.	1, 4988651.
0, 100878.	0, 5001966.	1, 4980272.
0, 081848.	0, 4089088.	1, 4913694.
0, 065369.	0, 3110833.	1, 4847116.
0, 051284.	0, 2056477.	1, 4818752.
0, 039408.	0, 0912496.	1, 4790388.
0, 029644.	9, 9661516.	1, 4762024.

Argu-

Argumentum	Log. Coëfficient.	Log. Interpolat.
0, 021519.	9, 8280669.	1, 4733660.
0, 015050.	9, 6739005.	1, 4705296.
0, 010040.	9, 4993153.	1, 4676931.
0, 006292.	9, 2979596.	1, 4587324.
0, 003639.	9, 0599911.	1, 4497716.
0, 001864.	8, 7689227.	1, 4453090.
0, 000788.	8, 3938506.	
0, 000234.	7, 8653987.	
0, 000029.	6, 9622048.	
0, 000000.		

§. 9. Vtriusque iam huius tabulae vſum paucae ſequentes docebunt regulae et ſubiuncta illuſtrabunt exempla:

Problema 1.

Datis globi pondere $= P$ et diametro $= \delta$, tormenti eleuatione $= I$, et obiecti ſuper horizontali plano feriendi diſtantia $= \Omega$; quaeritur celeritas initialis, quacum globus proiici debet, vt ſcopus feriatur.

Totus iam calculus ex ſuperiori tabula ſequenti operatione, ſimplici logarithmorum additione, abſoluitur:

I.) Exprimatur obiecti feriendi diſtantia et globi diameter in pedibus rhenanis eorumque partibus decimalibus, pondus vero globi in eiusmodi libris et partibus earum decimalibus, quarum librarum 64 efficiunt pondus pedis aquae cubici rhenani. Diſtantia obiecti multiplicetur per quadratum diametri

 globi

globi et productum diuidatur per pondus globi; habebitur *argumentum* exempli $= \frac{\delta^2 . \Omega}{p}$.

II.) Cum hoc argumento in Tabula, dato angulo proiectionis reſpondente, quaeratur argumentum proxime maius, eique correſpondens excerpatur Logarithmus Coëfficientis et Logarithmus Interpolatorius. Ad Logarithmum Coëfficientis addatur logarithmus ponderis globi per diametri quadratum diuiſi; numerus, horum logarithmorum ſummae reſpondens, erit quadratum celeritatis initialis quaeſitae prope verum; quod vt exactius habeatur, ſiquidem differentia inter argumentum exempli propoſiti et argumentum tabulae proxime maius notabilis ſit,

III.) Ad Logarithmum huius differentiae addatur logarithmus interpolatorius et logarithmus ponderis globi per diametri quadratum diuiſi, ſupra iam inventus; numerus trium horum logarithmorum ſummae reſpondens erit correctio quadrati prope veri modo inuenti, quae correctio ſemper eſt ſubtractiua; habebitur ergo quadratum verum hincque ipſa celeritas initialis quaeſita vera in pedibus rhenanis expreſſa.

Exemplum I.

In diſſertatione III. *Euleri* ſupra citata et Commentariis Berolinenſibus inſerta ſequens exemplum occurrit, quod iam ſupra §. 5. ad calculum reuocauimus.

Globus, diametri dimidii pedis rhenani, et cuius pondus $= \frac{2}{15}$ ponderis pedis aquae cubici rhenani, ſuper plano

plano horizontali ſub angulo 45° projicitur celeritate initiali = 485, 716. ped. rhen. et ex tabulis *Eulerianis* prodit iactus amplitudo = 3779. ped. rhen.

Inuerſo iam caſu, ponamus obiecti feriendi diſtantiam eſſe 3779. ped. rhen. et quaeri celeritatem initialem, globo huic imprimendam, vt ſub memoratis circumſtantiis feriatur obiectum; quod *inuerſum* problema ex tabulis iſtis ſolui non poteſt.

Ex tabulis hic exhibitis operatio ſequenti facili calculo abſoluitur:

Cum ſit $P = 57,6$; $\delta = 0,5$; $\Omega = 3779$.

erit *argumentum* exempli $= \frac{\delta^2 \Omega}{P} = 16,403211$.

In tabula, angulo proiectionis 45° reſpondente, invenitur argumentum proxime maius = 16, 586180

cui reſpondet Logarithmus coëfficientis	=	3, 0203151.
addatur Log. $\frac{P}{\delta^2}$	=	2, 3624825.
erit Log. quadrati prope veri cel. quaeſitae	=	5, 3827976.
adeoque quadrat. prope verum celer. quaeſ.	=	241433
hincque ipſa celeritas initialis quaeſita prope vera	=	491.

quae igitur non niſi 5 pedibus maior eſt vera.

Vt exactius definiatur,

capiatur argumentorum differentia	=	0, 182969
Ad cuius Logarithmum	=	9, 2623776.

 adde

adde Logarithmum interpolatorium tabulae = 2, 0359928
et Logarithmum $\frac{P}{\delta^3}$ = 2, 3624825

habebitur Log. correctionis ſubtractiuae = 3, 6608529.
Hinc Correctio = − 4578.
erat autem quadratum cel. prope verum = 241433

Hinc quadratum verum celeritatis quaeſ. = 236855.
et ipſa celeritas quaeſita = 486, 6.
quae igitur non niſi nouem partibus decimalibus a vera = 485, 7 in exceſſu aberrat.

Exemplum 2.

Globus, cuius diameter = 1. ped. rhen. et cuius pondus = 138 libr. quarum 64 efficiunt pondus pedis aquae cubici rhen. proiicitur ſub angulo 45° celeritate initiali = 400. ped. rhen. atque ex tabulis *Eulerianis* colligitur amplitudo iactus ſuper plano horizontali = 2467. ped. rhen.

Inuerſo igitur caſu, quaeritur celeritas initialis globo imprimenda, vt ſub datis hiſce circumſtantiis obiectum feriatur ad 2467. ped. rhen. remotum.

Erit ergo $P = 138$; $\delta = 1$; $\Omega = 2467$.

Hinc *argumentum* exempli $= \frac{\delta^2 \Omega}{P} = 17, 876812$.

In tabula angulo proiectionis 45° reſpondente, inuenitur argumentum proxime maius = 18, 367821.

cui reſpondet Log. coëfficientis = 3, 1043620.
adde Log. $\frac{P}{\delta^2}$ = 2, 1398791.

erit Log. quadrati prope veri cel. quaeſ. = 5, 2442411.
hinc quadratum prope verum cel. quaeſ. = 175485.
atque ipſa celeritas quaeſita prope vera = 419.

quae

quae igitur adhuc 19 pedibus maior eſt vera.
Vt exactius definiatur,

capiatur argumentorum differentia	=	0, 491009.
Ad cuius Logarithmum	=	9, 6910895.
adde Logarithmum interpolat. tabulae	=	2, 0989235
et Logarithmum $\frac{p}{\delta^2}$	=	2, 1398791.
habebitur Log. correct. ſubtractiuae	=	3, 9298921.
Hinc ipſa correctio	=	− 8509.
Erat autem quadratum prope verum cel.	=	175485
Hinc quadratum verum cel. quaeſitae	=	166976
et ipſa celeritas quaeſita	=	408.

quae igitur octo pedibus maior eſt ea, quam in calculo ex tabulis *Eulerianis* inſtituendo ſuppoſuimus; neque vero etiam maior conſenſus in hoc exemplo ſperari poterat, cum caſus propoſitus inter duas ſpecies tabularum a Ill. Comite de *Craevenitz* ſecundum methodum *Eulerianam* conſtructarum medius ſit, hincque amplitudo iactus non niſi ſumto medio proportionali computari potuerit, quae approximatio inter angulos aſymptoticos quinque graduum interuallo diſtantes nimis incerta eſt. Ceterum et hanc differentiam partis $\frac{1}{50}$ totius propemodum pro nulla eſſe reputandam ob experimentorum, ſummo ſtudio inſtitutorum, diſcrepantiam incomparabiliter maiorem, ex ſequenti exemplo abunde patebit.

Exemplum 3.

Inter experimenta Pariſiis a Ill. Domino *de Beauvoir* inſtituta ſequens huc pertinens occurrit:

Diame-

Diameter globi erat 11 poll. 10. lin. pedis regii gallici, et pondus globi 142 librarum, quarum 70 efficiunt pondus pedis aquae cubici gallici. (*) Proiiciebatur hic globus ſub angulo 45° pulueris pyrii libris $3\frac{1}{4}$, idemque iactus, ſeruatis, quam fieri potuit, exactiſſime omnibus circumſtantiis iisdem quinquies repetebatur, iactuumque amplitudines erant 490; 536; 505; 489; et 554 hexapedarum gallicarum; ita, vt differentia inter maximam et minimam amplitudinem fuerit = 65 hexapedis = 390 ped. gall. media vero amplitudo = 515. hexaped.; vnde patet, vim motricem ſeu celeritatem initialem, non obſtante reliquarum iactus circumſtantiarum aequalitate, inſigniter variaſſe; quae variationes ex tabulis hic exhibitis iam facile ad calculum reuocantur, et ſequenti tabula exhibentur: Cum ſcilicet pes gallicus regius ſit ad rhenanum vti 1000 : 1035; et 63, 1 librae gallicae efficiant pondus pedis aquae cubici rhen.; erit pro tabulis noſtris P = 144; et δ = 1, 0206, aſſumtisque ſingulis horum iactuum amplitudinibus ſequentes prodeunt celeritates globi initiales:

Iactus	Amplitudo ped. rheh.	Cel. globi initial.
I.	. . 3043 - - -	. . . 509. ped. rhen.
II.	. . 3328 - - -	. . . 566. - - -
III.	. . 3136 - - -	. . . 526. - - -
IV.	. . 3036 - - -	. . . 508. - - -
V.	. . 3440 - - -	. . . 591. - - -

Variatio itaque celeritatis initialis a maxima ad minimam ad 83. ped. rhen. excurrit et media inter omnes 540 ped. rhen. fuit; ex quo tamen ipſo patet, haec experimenta

(*) vid. Cours de Mathematiques à l'uſage du Corps Royal de l'Artillerie par M. *Bezout* Tome IV. pag. 456.

menta non mediocri cura fuiſſe inſtituta, ſi perpendamus, quod in Cel. *Huttoni* diſſertatione Transactionibus Anglicanis inſerta, de vi pulueris pyrii legitur, accidiſſe ipſi in experimentis circa globorum celeritatem initialem pendulorum ope inſtitutis, vt haec celeritas, circumſtantiis omnibus, quantum fieri poteſt, iisdem, vltra trecentos pedes, ſeu partem totius plus quam dimidiam variauerit.

§. 10. Haec igitur allata exempla cum ſufficiant pro oſtendenda facili applicatione tabulae, cuius ope ex datis globi pondere et diametro, eleuatione mortarii et obiecti feriendi diſtantia colligitur celeritas initialis, globo, vt propoſitum feriat ſcopum, imprimenda; et cuius ope, quod primarium in re balliſtica problema eſt, ex data *iactus probatorii ſic dicti* amplitudine computari queat etiam in aëre reſiſtente aeque facile, ac in vacuo, celeritas initialis, globo a data pulueris pyrii quantitate impreſſa; ſequitur alterius tabulae hic exhibitae vſus in reſoluendo ſequenti problemate:

Problema 2.

Datis globi pondere $= P$; diametro $= \delta$ et celeritate initiali $= c$ cum angulo proiectionis $= 1$; quaeritur amplitudo iactus ſuper plano horizontali.

Hoc problema ex tabula ſuperiori facili et prompto calculo reſoluitur:

I.) Exprimatur globi pondus in libris, quarum 64 efficiunt pondus pedis aquae cubici rhenani; diameter globi eiusque celeritas initialis in pedibus rhenanis eorumque partibus decimalibus. Diuidatur pondus

 globi

globi per productum quadratorum diametri et celeritatis initialis globi; habebitur *argumentum* Exempli $= \frac{p}{\delta^2 c^2}$.

II.) Cum hoc argumento in tabula, dato proiectionis angulo reſpondente, quaeratur argumentum proxime minus, eique correſpondens excerpatur Logarithmus coëfficientis et Logarithmus interpolatorius. Ad hunc Logarithmum coëfficientis addatur Logarithmus ponderis globi per diametri quadratum diuiſi; numerus horum Logarithmorum ſummae reſpondens erit amplitudo iactus quaeſita prope vera in pedibus rhen. expreſſa; quae vt exactius habeatur, ſiquidem differentia inter argumentum caſus propoſiti et argumentum tabulae proxime minus notabilis ſit,

III.) Ad Logarithmum huius differentiae addatur Logarithmus interpolatorius et Logarithmus ponderis globi per diametri quadratum diuiſi; numerus trium horum Logarithmorum ſummae reſpondens erit correctio amplitudinis prope verae modo inuentae, quae correctio ſemper eſt ſubtractiua; habebitur ergo vera iactus amplitudo in pedibus rhen. expreſſa.

Exemplum 1.

Globus, diametri dimidii pedis rhen. et ponderis 57. 6 libr. quarum 64 efficiunt pondus pedis aquae cubici rhenani, proiicitur ſub angulo 45°. celeritate initiali =

$= 485, 7$ ped. rhen. [Quaeritur amplitudo iactus ſuper plano horizontali.

Ex tabulis hic exhibitis calculus ita ſe habet: Cum ſit $P = 57, 6$; $\delta = 0, 5$; $c = 485, 7$. Erit *argumentum* exempli $= \frac{P}{\delta^2 c^2} = 0, 000976$. In tabula, angulo proiectionis 45° reſpondente, inuenitur argumentum proxime

minus - - - - -	=	0, 000954
cui reſpondet Log. coëfficientis	=	1, 2197464
addatur Log. $\frac{P}{\delta^2}$ - - -	=	2, 3624825
erit Log. amplitudinis prope verae	=	3, 5822289
hinc amplitudo iactus prope vera	=	3821.
Vt exactius definiatur		
capiatur argumentorum differentia	=	0, 000022
Ad cuius Logarithmum - -	=	5, 3424227
adde Log. interpolatorium tabulae	=	3, 9304917
et Log. $\frac{P}{\delta^2}$ - - -	=	2, 3624825
habebitur Log. correct. ſubtractiuae	=	1, 6353969
hinc correctio - - -	= −	43
erat autem amplitudo prope vera	=	3821
Ergo vera amplitudo iactus, vt ante §. 5 et 7, - -	=	3778 ped. rhen.

Exemplum 2.

Globus, cuius diameter = 1. ped. rhen. et cuius pondus = 138 libr. quarum 64 efficiunt pondus pedis aquae cubici rhenani, proiicitur ſub angulo 45°. celeritate initiali = 400. ped. rhen. Quaeritur amplitudo iactus ſuper plano horizontali.

Ex tabulis Ill. *Euleri*, computando hoc exemplum pro binis tabularum ſpeciebus, inter quas cadit, et ex binis amplitudinibus iactuum ita inuentis ſumendo proportionale debitum, colligitur amplitudo iactus $= 2467$. ped. rhen.

Ex ſuperioribus tabulis calculus facile ita expeditur: Cum ſit $P = 138$; $\delta = 1$ et $c = 400$;

erit *argumentum* exempli $= \frac{P}{\delta \cdot c^2} = 0,000862$.

In tabula, angulo proiectionis 45°. reſpondente, inuenitur argumentum proxime minus - $= 0,000786$,

cui reſpondet Log. coëfficientis $= 1,2640577$.
addatur Log. $\frac{P}{\delta^2}$ - - - $= 2,1398791$.

erit Log. amplitudinis prope verae $= 3,4039368$.
hinc amplitudo iactus prope vera $=$ 2535. ped. rhen.
Quae vt exactius definiatur,
capiatur argumentorum differentia $= 0,000076$.

Ad cuius Logarithmum - - $= 5,8808136$.
adde Log. Interpolat. tabulae - $= 4,0255108$.
et Log. $\frac{P}{\delta^2}$ - - - - - $= 2,1398791$.

habebitur Log. correct. ſubtractiuae $= 2,0462035$.
hinc correctio amplitudinis - $= -$ 111.
Erat autem amplitudo prope vera $=$ 2535,

Ergo amplitudo iactus vera - $=$ 2424 ped. rhen.
quae ergo ab Ill. *Euleri* tabulis 43 pedibus ſeu parte $\frac{1}{60}$ totius in exceſſu ob rationes ſupra §. 9. allegatas differt.

Vt nunc tabulas noſtras etiam ad experimentum adplicemus, reuocemus ad calculum id experimentum, quod

quod ex eorum, quae Ill. *de Beauvoir* Pariſiis inſtituit, numero ſupra recenſuimus; vbi quidem nunc ſupponamus globi celeritatem initialem mediam ſupra ex ipſis his tabulis concluſam, cum hic non niſi de methodo harum tabularum exemplis illuſtranda quaeſtio ſit.

Exemplum 3.

Globus cuius diameter 11 poll. 10 lin. pedis regii gall. et cuius pondus 142 libr. gall., proiicitur ſub angulo 45°. celeritate initiali 521, 7 ped. gall. Quaeritur amplitudo iactus ſuper plano horizontali.

Cum, reductis menſura gallica ad rhenanam et pondere globi ad eiusmodi libras, quarum 64 efficiunt pondus pedis aquae cubici rhenani, in hoc exemplo ſit

$P = 144$, $\delta = 1,0206$ et $c = 540$;

erit *argumentum* exempli $= \frac{P}{\delta^2 c^2} = 0,000474$.

In tabula, angulo proiectionis 45°. reſpondente inuenitur argumentum 0,000478, quod tam prope ad argumentum exempli accedit, vt tantillae differentiae rationem habere etſi facile, tamen ſuperfluum foret:

Huic argumento reſpondet

Log. coëffic. - - $= 1,3650393$

cui addatur Log. $\frac{P}{\delta^2}$ - - $= 2,1406513$

habebitur Log. amplitud. quaeſitae $= 3,5056896$.

adeoque amplitudo iactus quaeſita $=$ 3203. ped. rhen.

quae non niſi 16 pedibus ſeu $\frac{1}{188}$ totius a media iactus amplitudine $= 3197$. differt, cum in ipſis experimentis inter eosdem iactus differentia amplitudinum vltra 400 ped. adeoque vltra $\frac{1}{9}$ totius fuerit reperta.

 §. 11.

§. 11. Ex hiſce igitur exemplis aliisque concludi poſſe videtur, tabulas balliſticas methodo, in ſuperioribus expoſita conſtructas et ſatis cum experientia conſentire et, cum earum vſus non niſi ſimpliciſſimam Logarithmorum tractationem exigat, ad praxin apprime aptas eſſe; qua applicationis practicae facilitate exigua illa a ſummo theoriae rigore aberratio, quam in methodo memorata approximationis neceſſitati indulſimus, optime compenſatur, inprimis cum ſummus theoriae rigor ob varias in tormentorum exploſione circumſtantias, in quas nullum eſt artis imperium, vacillante executionis incertitudine abſorbeatur.

Neque tamen de gradu praeciſionis eiusmodi tabularum ante iudicari velim, quam praeter ea, quae ad earum conſtructionem, pag. 183. monita ſunt, etiam argumenta earum ad paullo vlteriores, quam quidem in ſuperioribus, fractiones decimales fuerint euoluta. Ceterum etiam id notari conuenit, quod, licet in ſuperiorum tabularum conſtructione determinatam quandam pro aëris reſiſtentia hypotheſin aſſumſerimus ponendo $\mu = 3,0615$, (§. 3.) tamen ex praecedentibus perſpiciatur, eas etiam ita adornari poſſe, vt valor μ maneat indefinitus. Cum ſcilicet ſit

$$\frac{C}{\sqrt{B}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \text{Tang. } 2\psi\left(\frac{\sqrt{1+\text{ſin. } 2\psi^2}}{\text{coſ. } 2\psi^2}\right). \quad \text{§. 6.}$$

$$\text{et } C = \Theta + \frac{1056,880.\, P}{\mu.\, \delta^2.\, c^2.\, \text{coſ. } I^2}. \quad \text{§. 3.}$$

$$\text{poſito } \tfrac{1}{2}\text{tang. } I \text{ ſec. } I + \tfrac{1}{2}\text{Log. hyp. tang. }(45^\circ + \tfrac{1}{2} I) = \Theta$$

$$\text{erit } \left(\frac{2\sqrt{B}}{3\sqrt{3}} \text{tang. } 2\psi\left(\frac{\sqrt{1+\text{ſin. } 2\psi^2}}{\text{coſ. } 2\psi^2}\right) - \Theta\right). \frac{\text{coſ. } I^2}{1056,880} = \frac{P}{\mu.\, \delta^2\, c^2}$$

ita, vt tabulae argumentum etiam conſtitui poſſit $\frac{P}{\mu.\, \delta^2.\, c^2}$; et cum ſit tota iactus amplitudo

$$\Pi . V . D = 33,82045 . \frac{\Pi . V . P}{\delta^2 . \mu} . \text{ §. } 8;$$

coëfficiens 33, 82045. Π V in tabula exhibebitur, qui in $\frac{P}{\delta^2 . \mu}$ ductus totam dabit iactus amplitudinem; quales tabulae definiendo per experimenta valori ipſius μ inſeruire poſſunt. Adde, quod etiam tabulas pro certo quodam ipſius μ valore conſtructas ad alium valorem (μ) facile reducere liceat; quem in finem talis tabulae argumenta per $\frac{(\mu)}{\mu}$ multiplicari, et ad Logarithmum coëfficientis in tabula exhibitum Logarithmum ipſius $\frac{\mu}{(\mu)}$, eiusque duplum ad Logarithmum interpolatorium addi oportebit; exactius vero, ſi ex tabulis pro valore μ conſtructis propoſitum aliquod exemplum in hypotheſi valoris (μ) computare velimus: fiat argumentum exempli $\frac{P}{\delta^2 c^2} . \frac{\mu}{(\mu)}$ et ad Logarithmos coëfficientis et interpolatorium in tabula pro argumento proxime minori exhibitos addatur Logarithmus ipſius $\frac{\mu}{(\mu)}$; qui calculus ſequenti exemplo illuſtrabitur: Iactus §. 5. deſcripti quaeratur amplitudo in communi pro aëris reſiſtentia hypotheſi. Erit ergo $(\mu) = 1$. §. 3; et $\mu = 3,0615$.

Hincque Argumentum - - -	$\frac{P}{\delta^2 c^2} . \frac{\mu}{(\mu)}$	= 0, 002990
At argumento tabulae proxime minori - - -		= 0, 002751
cuius differentia - - - - -		= 0, 000239

competit Log. coëfficientis	Log. Interpolat
0, 9241544	3, 3176442
adde Log. $\frac{P}{\delta^2}$ = 2, 3624825	2, 3624825
Log. $\frac{\mu}{(\mu)}$ = 0, 4859343	0, 4859343
Log. diff. =	6, 3783979
erit Log. amplitud. = 3, 7725712	2, 5444589 = Log. Corr.

prope verae.

Hinc

Hinc amplitudo prope vera $= 5923$ et correctio $= - 350$. adeoque vera iactus amplitudo $= 5573$. ped. rhen. Si nunc iactus huius amplitudinem ex ipſis formulis fundamentalibus §. 4. datis computemus: erit

$B = 6,76622$; $C = 3,21225$; $D = 7794$. ped. rhen.

$k = 2,010746$; $f = 3,13026$; $g = 2,03853$.

$R = 78°. 42'. 32''$; $V = 38°. 4'. 45'' = 2284,7$.

vnde tota iactus amplitudo

$$= 0,000290888. \frac{B. V. D}{f k} = 5568. \text{ ped. rhen.}$$

quae ab ea ex tabulis modo inuenta ſenſibiliter non differt.

PHYSICA.

DE

PVLLO MONSTROSO,

QVATVOR PEDIBVS, TOTIDEMQVE ALIS INSTRVCTO.

Auctore

C. F. WOLFF.

Vere anni 1777 cum ex ouis, quae gallinae incubanda ſuppoſueram, aliquot reſtarent, ex quibus pulli non prodierant; haec aperui. Reperi alia ſterilia, alia pullis faecunda, ſed mortuis. Inter haec vnum erat, ex quo pullum, quem hic trado, monſtroſum extraxi. Iſte, vt reliqui mortui omnes, duodeuiginti circiter dierum eſſe videbatur, ſiquidem partibus corporis omnibus perfectis, plumisque gaudebat et ſolo tumore abdominis, quo vitellus continetur, a pullis natis differebat.

Capite, collo, thorace et abdomine ſimplex eſt hic pullus et recte formatus, ſolis extremitatibus duplex, bigeminas alas gerens bigeminosque pedes. Et ipſe vitellus ſimplex eſt, vt totum ouum fuit.

 Ex-

Extremitates autem ita diſpoſitae ſunt vt facile naturales a praeternaturalibus et acceſſoriis dignocas. Illae enim non modo maiores ſed ſolitis locis ſitae quoque ſunt. Alae lateribus thoracis ſolito modo adſident, et pedes e regione iliaca vtrinque egrediuntur. Praeternaturales autem pullo, hactenus recte formato, additae, in ima eius regione lumbari, vel potius in ipſa ſede oſſis ſacri, collocatae exiſtunt; ea quidem ratione, vt pedes ſuperius ſint poſitae, alae inferius.

In ea nimirum regione, quam os ſacrum in animalibus occupat, duo femora apparent, ita collocata, vt radicibus ſuis ad ſpinam dorſalem conueniant, extremitatibus autem, genua referentibus, extrorſum diuergant. His tibiae cum tarſis, metatarſis et digitis ſuis ea ratione inarticulantur, vt pedes iſti monſtroſi ſurſum extendantur, ſitumque habeant, pedibus naturalibus et toti pullo oppoſitum. Quo pullum, ſi pedibus illis inſiſtere vel incedere vellet, inuerſum, capite directum deorſum, incedere oporteret.

Alae pedibus ſitu reſpondent. Proxime infra radices femorum illae radicibus ſuis loco uropygii adhaerent. Inde vtrinque extenduntur eo modo, vt coſtis deorſum marginibus pennatis ſurſum reſpiciant, adeoque alis naturalibus recta opponantur.

Hac ſitus conformitate alae pedesque omnino ad vnum pullum pertinere videntur, ſecundarium, et diuerſum a pullo, cui ſuperfluae adhaerent, ſed imperfectum, et ita po tum, quaſi capite et collo intra anum vel paulo magis antrorſum intra pubem primarii pulli abſconditus, pe-

re

ctore et abdomine autem in os ſacrum eius immerſus eſſet, et ſolis alis pedibusque ſurſum directis emergeret.

Haec fere externa huius pulli monſtroſi conformatio eſt, de qua tamen aliquid addendum erit, poſtquam internarum partium conditionem expoſuero. Vt autem partes acceſſoriae oſſis ſacri imprimis ſedem et vropygii et ani et pubis occupare videntur; ita omnino quoque orificium ani extus fruſtra quaeſiui. Alae acceſſoriae radicibus ſuis in ſede vropygii inter ſe confluunt, regionemque ibi interſcapularem pulli ſpurii efficiunt (Tab. VI.) ſub his alis igitur orificium ani quaerendum eſſe cenſebam. Incipit autem continuo a margine alarum deorſum tumor abdominis, vitellum continens, flauus et deplumis, ſine vllo orificii veſtigio. Neque de ani defectu dubitabam cum et *Hallerus* in caniculo monſtroſo, cui tertius pes poſterior loco caudae erat excretus, eundem defectum inueniſſet, et mihi ſimilem obſeruare contigiſſet in monſtro humano tripede. Sed haec res me fefellit et inteſtina exitum monſtrauerunt, vbi eum haud quaeſiueram.

Inciſo tumore abdominis, quo vitellus continetur, vidi illius tunicam tenuem et pellucidam, per quam flavus vitellus tranſparet, continuationem eſſe abdominis. Hac tunica remota, vitellus eximi poterat et ſeparari a canale inteſtinorum tenuium, cui anguſto collo adhaeret. Tum viſcera abdominis apparuerunt. Magnus mole ventriculus, vt ſolet in pullis, ſimplex primo in conſpectum venit cum hepate; deinde retro illum paruum volumen inteſtinulorum; quo euoluto cognoui, praeter aliquas appendices, canalem ſimiliter ſimplicem eſſe. Duodenum

 enim

enim ſimplex a ſimplici ventriculo producitur. Hoc in ſimplex ieiunum et ileum continuat, quod tandem in duos canales diuiditur, quorum alter in craſſa inteſtina abit alter autem inteſtinulum producit, aliqua longitudine procedens, tum ſine caeco clauſum. Deinde loco duorum inteſtinorum caecorum, quae in gallinis ſunt, tria erant in hoc pullo aequali longitudine et figura ſimili, vt quaenam eorum naturalia, quod acceſſorium eſſet, definiri non poſſet. Caetera viſcera omnia thoracis et abdominis ſimplicia et naturalia ſunt. Ipſi renes, ipſumque inteſtinum rectum ſimplicia ſunt. Omnia ita formata ita poſita ſunt, qualia pullo primario, ad quem pertinent, conueniunt. Quod referri poſſet ad pullum ſpurium, nihil quidquam apparuit. Vt collo ergo vt capite, vt abdomine et thorace, viſceribus quoque hic caret omnibus.

Proſequendo autem inteſtinum rectum, nullum eius finem intra abdomen reperi, qui ſaccum caecum referret. Stylo in cauitatem inteſtini adacto, exitum huius, et verum orificium ani externe inter plumas detexi. Hoc iuxta femur ſiniſtrum pulli ſecundarii, quod pulli primarii acceſſorium femur dextrum eſt, in ea ſede aperiebatur, quae iuxta marginem dextrum oſſis ſacri eſt. Magnitudo ea eſt, vt aciculam aegrius admittat.

Hoc ſitu orificii conſiderato apparet, illud ſecundario non minus quam primario pullo conuenire, et vtrique commune eſſe. Vnde porro ſingularis haec pullorum compoſitio accuratius intelligitur et cuinam monſtrorum generi illa proxime accedat. Connati ſunt proprie perfectus

fectus pullus primarius et imperfectus ſecundarius regione peluis inferiori, vnde ſitu et poſitione ſibi inuicem oppoſiti ſunt, vt pedes vnius contra pedes alterius, alae contra alas dirigantur. Hactenus ergo hic pullus monſtroſus conuenit cum monſtro Duverneii in actis Pariſinis deſcripto, et cum alio, quod in muſaeo Academiae noſtrae conſeruatur; in quibus puellae integrae totis peluium partibus inferioribus, diductis cruribus, connatae ſunt, vt vuluae et ani, ſolitis locis denegatis vtrinque inter vtriusque puellae crura exiſtant. Differt autem ab his monſtris humanis, quod minor et imperfectus pullus pelui non modo ſed toto ſui, quatenus exſtat, corpore pelui maioris innatus ſit, colloque capite thorace et abdomine careat.

Tabulae VI, huc pertinentis, prior figura pullum a tergo demonſtrat, cuius in regione ſacrali ſuperius acceſſorii pedes, quibus pullum inuerſum incedere oporteret, naturales, quibus ille erectus fertur, inferius, inter vtrosque alae apparent acceſſoriae.

Figura poſterior viſcera repraeſentat, in quibus nihil praeter naturam eſt, exceptis caecis inteſtinulis, quorum tria recto adiuncta ſunt, loco ſolitorum duorum.

GALE-

GALEOPITHECVS.
VOLANS, CAMELLII.
DESCRIPTVS

A

P. S. PALLAS.

Prodcat tandem, quam dudum promiſeram (*a*), ante ſexdecim fere annos parata deſcriptio animalis ex Indiae orientalis continenti et Inſulis rariſſimi, quod Zoologis, etiam recentiſſimis, vel perfunctorie tractatum, vel prorſus non ex autopſia cognitum fuit. Contigit nempe mihi in variis, quae paſſim perluſtraui, Muſeis quatuor huius animalis, ſub Linneano *Lemuris volantis* nomine alias ſatis noti, diuerſae aetatis ſpecimina examinare; in quibus, quicquid obſeruaui, ſcripto prodere iuuabit, dum Zoologus aliquis peregrinator Indicos nobis aperiat theſauros.

Antequam proprias obſeruationes exponam, non alienum erit Auctorum, qui Animal de quo dico adtigerunt, excerptum apponere. Primus, ni fallor, mentionem eius fecit *Bontius* (*hiſtor. Ind. natur.* ad calcem *Piſonis*

(*a*) Spicileg. Zoolog. *Faſcic. III. p. 4.*

nis cap. 16. p. 68.), idemque plura fere, quam quiſquam alius, de eodem reliquit. Scribit, "in Guzurata Indiae "dari *Veſpertiliones* (vt non male vocat) *mirabiles*, qui "gregatim, anſerum ſylueſtrium more, volent, circa ve- "ſperam in aëre oberrantes vel ex arboribus pendulos; "quique vti mole ſua, qua felem aequant, ita et forma "ſingulari, aduenis ſint miraculo. Belgas illis nomen *Si-* "*miarum alatarum* indidiſſe." Adiecit *Bontius* iconem a- nimalis, rudem illam quidem, attamen ex vnguibus, pel- le corpus totum ambiente et variegatione velleris apprime dignoſcendam. Deſcriptio quoque eius ſatis verax eſt; in qua praeſertim notandum, quod dicat: "*tripedales* repe- "riri, cauda ſpithamea; *vellere* ſupra cuniculorum more "molliſſimo, cano nigroque vario veſtiri; *capite* eſſe ob- "longo, adſpectu foedo, rictu imbelli, *dentibus* exiguis, ad "rapinam compoſitis; *auriculis* paruis, membranaceis, ro- "tundis, et *vngues* habere in omnibus pedibus quinos, "quibus mordicus obuia quaeque retinet, imprimis arborum "fructus, quos depopulatur."

Poſt *Bontium* in *Miſcellan. Nat. Curioſ. Dec. I. an. 9. et* 10. *obſ.* 194. *p.* 455. *Hellbigius* inter varia Indiae curioſa recenſet Feles volantes, quo ſub nomine *Sciuros petauriſtas* (*b*) intellexiſſe videtur, et *Simias volantes*, huc veroſimillime facientes, quas in Halmahera inſula reperiri acceperat; noui caeteroquin nihil de earum indole atque forma adferens.

Melius

(*b*) *Miſcellanea Zoolog. Hagae Com. 1766. edita p. 54. tab. VI. Pennant ſynopſ. of quadrup. p. 292. t. 27.*

Melius de hiſtoria huius animalis meruit *Camelli*, in Faunula Inſularum Philippinenſium per *Petiuerium Actis Anglicis* faſciculatim inſerta. Extat deſcriptio, quam de *Galeopitheco* ſeu *Cato-ſimio volante* ſuo, vt ſatis concinne appellauit, communicauerat *Camellius*, anglico idiomate in *Actorum angl. vol. XXIII, n.* 277. *p.* 1065. eademque latine in *Vol. XXV. n.* 305. *p.* 2197. Recenſentur ibi nomina animalis barbara apud Inſularum Philippicarum incolas vſitata, Biſayarum *Colago* et *Caguang*, Pampangorum et Taghalanum *Gigua*. Deſcribitur animal mole felis, forma ſimiae ſed graciliore, longitudine a capite ad caudam triſpithamali, latitudine inter expanſa brachia biſpithamea, inter extremos digitos trium ſpithamarum; trunci latitudo vulgo palmaris ponitur, pellis vero vtrinque expanſae ſpithamea. Sed addit *Camellius* in Pampanga prouincia dari tantos, vt Chinenſium vmbracula, ſeu ſpithamarum ſex amplitudinem exaequent. *Colorem* (paulo aliter quam mihi deſcribendus eſt) fuſceſcentem indicat, in dorſo ſtriis albidis, trunco longioribus, per membranas volaticas breuioribus, eleganter varium. *Faciem* adſimilat Cercopitheco, et explicat quomodo animal pelle totum corpus ambiente expanſa, adinſtar Sciuri volantis, ab vnius arboris cacumine ad medium alterius, *lento quaſi volatu* deſcendat, tumque vt in aliam ſeſe librare queat, huius iterum in cacumen ſaltabundum enitatur. Narrat denique *Pullos* geminis matrum mammis vnguium pariter ope et ſuctione adhaereſcere; *victum* autem dubium pronunciat, tamen veroſimillime in fructibus arborum poſitum, e quibus animal vix vnquam deſcendit.

Iconem

Iconem Galeopitheci a *Camellio* tranſmiſſam, ſed rudem et inconditam, e ſolis fere pedum falculis, ambeunte membrana, lineolisque velleris dignoſcendam *Petiverius Gazophylacio* ſuo inſeruit (*Oper. Vol. I. tab.* 9. *fig.* 8. *catal. n.* 175.). Paulo meliorem deinde communicauit *Seba* (*theſaur. Vol. I. p.* 93. *tab.* 58. *fig.* 2. 3.), quae tamen neque proportionem palmarum recte ſeruat, neque ſtrias velleris exprimit, et in coloratis exemplaribus huius operis prorſus alieno colore, gryſeo-fuſco, vniformi obducta cernitur. Idem eſt vitium iconis *Friſchianae*, Sebana etiam peioris, cui pellis farcta *Muſei Academiae Regiae Berolinenſis* pro archetypo fuit, puluere et antiquitate fuſcata, totaque (quum eam vidi) depilis, vti et pictura *Friſchii*, meo quidem iudicio, optime refert, quanquam auctor pilos molles, talparum velleri ſimiles adfuiſſe dicat (*Icon. avium claſſ. VIII. tab.* 104.) et colorem quoque velleris, ſed alium plane, quam fuſcum iſtum iconi illitum, deſcribat. Neſcio ſic etiam vnde ſumſerit *Friſchius* quae de *Fele* ſua *volante* (ſic enim praeeunte *Seba* vocauit, ſed *Martis volantis* nomen, neſcio quo fundamento, aptius fore putat) ibidem retulit: "celerrimi eſſe volatus, "in inferiore tamen regione aëris morari, vbi gyratim "volans praedam ſectetur;" — haec enim omnia ſupra adlatis *Bontii* atque *Camellii*, fide digniſſimorum per autopſiam auctorum, e directo fere contradicunt.

Non praetermittendus, etiam hic, *Valentyn*, qui in verboſo opere belgico (*Oud en nieuw Ooſtindien Vol. III. p.* 269.) Galeopitheci quoque videtur mentionem feciſſe. Habet autem haec quae huc poſſunt referri: „Nautas na- „uis cuiusdam (*'t Jacht van Boero*) quae Anno 1677.

 „prope

„ prope Ternatam in inſula Halemahera (Philippinenſibus „ proxima) adpulerat, vidiſſe Animal quod in arboribus verſ„ ſabatur, ex vna in alteram transuolans. Habuerunt ſta-„ tim pro Sciuro, ſed caput acutius viſum eſt, ſimiliusque „ capiti Didelphidis orientalis (quam in Moluccanis inſu-„ lis vulgarem eſſe docet Idem). Villo innuitur fuiſſe ci-„ nereo, ſtria a roſtro per dorſum ducta nigra. Neque in hoc ſolo vitioſa e relatis deſcriptio: „ pellis laterum a pri-„ morum pedum digitis vsque ad digitos poſticorum ex-„ panſa dicitur; „ recte vero „ pilo veſtita et ſubtus inſtar „ abdominis alba „ deſcribitur. „ Quum per arbores ſal-„ tabat animal has pelles ſimul extendebat. Inquilini vero „ aſſeruerunt ſimilia animalia ibi prius nunquam apparuiſſe.“ E quo concludi poſſet Galeopithecum volantem continentis Indiae, praecipue transgangeticae, atque Philippicarum inſularum maxime inquilinum, rarius in proximas tranſire, et in Moluccanis, quas Belgae tenent, ignotum fere eſſe, quemadmodum etiam ad curioſorum in Belgio Muſea rariſſime peruenire ſolet.

Galeopithecum denique noſtrum ſubindigitat *Nieuhofius* (*Gedenkwaardige braſilian. Zee en Lantreize* p. 283.) vbi de Sciuro petauriſta agens addit: „ Dari analoga ani-„ malia ſpecie ſimiarum, inſtar huius Sciuri pellibus inter „ pedes alata, quibus dentes vnguesque peracuti, oculi au-„ tem viuidi ſerique adſpectus ſint.“ Immo forſan et huc referendus eſſet locus in *Relationibus* german. *Miſſionariorum Halenſibus Continuat.* 26. *Vol.* 3. *p.* 74. vbi ſit mentio Veſpertilionum magnitudine paruae felis, quos Miſſionariorum aliquis inter ramos arboris rhizophorae antemeridianis horis ſuſpenſos et ad ſolem ſibilantes vidit; niſi ala-

alarum ſimul volatura fere biulnaris, et volatus longinquus indicarentur.

Praeter iſtos itaque nullus, quantum memini, itineratorum Galeopithecos expreſſis verbis adtigit. Miror etiam *Briſſonium*, quod nullam eius notitiam *operi* ſuo inſeruit, atque *Cel. Allamand* qui *Epitomen*, quam eius dedit, ſingulari hacce ſpecie, in Belgio tamen ſatis nota, non auxit. Plane etiam neglexit illud *Buffonius*, ne quidem inter animalia dubia, quorum elenchum in fine *Operis* tetrapodologici ſubnexuit, eiusdem mentione iniecta; vt videatur *Sebae* et *Camellio* omnem in hoc fidem denegaſſe. Magis aequus fuit *Illuſtr. Linnaeus* atque ſecundum ea, quae proſtabant, animal in *Syſtemate* ſuo ad genus naturale reducere tentauit; neque longe a veritate abfuit, *Lemuris volantis* titulo illud recenſens. Eſt enim vere media et ambigua ſpecies inter Lemurum et Veſpertilionum anomalas gentes, cuius adfinitatis ex vtraque parte momenta ſigillatim exponam.

Cum Lemuribus, quas Proſimias non male vocat *Briſſonius*, ſimilitudinem omnem conficiunt: *Capitis* forma; ſimplices *auriculae* atque naſus; *oris* ſtructura praeſertim interior; *dentium* primorum inferiorum ſitus inclinatus; *mammarum* ſitus pectoralis, et geminae ſingularum papillae; gracilitas *colli* et totius *trunci*, armorumque ſimul longitudo. Conueniunt etiam vtcunque: *digitorum* numerus, *myſtacis* teneritudo, *coſtarum* atque *vertebrarum* numerus et *clauicularum* praeſentia; quae tamen Veſpertilionibus pariter contigerunt.

 Plura

Plura vero, fateor, in Galeopitheci volantis conformatione occurrunt, quibus a Lemurum etiam anomalis ſpeciebus, quarum vna (*c*) dentibus atque tarſis, non digitis diſcrepat, abhorret, et quorum in nullo genere, praeter Veſpertiliones, analoga exempla inueniuntur. Talia ſunt: *dentium* forma anomala, *primorum* inferiorum crenae, ſuperiorum defectus; *aurium* ſtriae transuerſae, quarum loco potius lobuli ſeu laminae intus transuerſae Lemuribus; *pedum* primorum longitudo inſignis et magni digiti; *pollicum* diuaricatio nulla, ne in plantis quidem, quarum digiti aequales, vt in Veſpertilionibus ſemper ſunt; *vnguium* ſeu falcularum magnitudo; *penis* cum ſcroto exſertus, omniumque maxime *pellis* volatica, omnes artus, inde a collo, ipſamque caudam, vt in Veſpertilionibus deorſum inflexam, in vnum connectens, et *inter digitos* quoque, maxime palmarum expanſa. — Vt alia nunc omittam, e quibus omnibus quis eſt? qui non videat per Galeopithecum volantem Naturam Veſpertiliones (nimium abnormia a reliquis mammatis animalia) ſeriei quadrupedum et ſpeciatim Lemurum generi, inter Simias et Didelphides intermedio, arctiſſimo affinitatis vinculo innectere voluiſſe; quemadmodum Phocas, per Trichechum ad Cetaceorum formam nimium tendentes, per anomalam *Lutram marinam* Kamtſchatico-Americanam (*), terreſtrium ferarum ſaeclis temperato tranſitu continuauit.

Equi-

(*c*) Lemur Spectrum, de quo varia monui in *Nou. Specieb. Quadrup. e Glir. ordine p.* 275. et quem ſub nomine *Tarſier* habet *Buffonius*.

(*) E ſpeciminibus pro Muſeo Petropolitano adlatis didici, quod *dentes primores* (ſupra ſeni), infra tantum quaterni, *pedum* ſitus, propor-

Equidem *Galeopithecus volans* ſecundum characteres dentium atque pedum, pelli volaticae habituique additos, peculiare genus videtur ſolus conſtituere. Si tamen generi cuidam naturali, inter iam confirmata, ſit addendus (in vniuerſum enim genera ex vnica anomala ſpecie creata pauciſſima mihi arrident et vix vlla, praeter maximarum quadrupedum aliqua, naturalia ſunt) debet ad Veſpertiliones migrare, quibus inconſtantiſſimum eſſe dentium numerum, alibi ſatis probaui. Interim *Camellii* nomen graecum feci, vt dubium animal appellarem, aptius enim non inueni (*c*) et nouum fingere nolui.

Specimina, e quibus ſequens deſcriptio *Galeopitheci volantis* coaluit, ſunt: primo, *foetus* elegantiſſimus, quem e *Muſeo Academiae Lugduno batauae* humaniter conceſſit *Cel. Allamand*, in *ſecunda Tabula fig.* I. naturali magnitudine delineatus; deinde — *iuniora animalia* duo, alterum in *Muſeo Groueſteyniano* quod Hagae-Comitum latebat, alterum in *Muſeum Academiae Petropolitanae* e Belgio translatum, cuius iconem *Tabula VII.* ſiſtit; — denique *pellis* farcta *adulti*, *Friſchio* deſcripta, mihique a *Celeb. Gleditſchio* perhumaniter communicata, cuius cranium et pedum oſſa delinea-

portio et ſtructura, maximeque *poſticorum* forma remos Phocarum referentium, cum totius corporis habitu atque circumcaeſura, et breuitate caudae, inſignem Lutridis cum Phocarum genere affinitatem praeferunt.

(*c.*) Poſſet aliquis locum *Ariſtotelis (Hiſt. Anim. Lib. I. cap. 5.)* Galeopitheco noſtro adplicare, vbi dicit; cute volare animalia quaedam, vt *Vulpeculam* et Veſpertilionem. — Potuit autem Veſpertiliones magnos, canino capite, hoc nomine ſubintellexiſſe Stagirita.

lineari curaui. Ex horum conſideratione collecta ſunt, quae hic traditurus ſum; pleniora ſpero, quam vllus antea memoriae prodidit, lucemque Animanti remotiſſimae Indiae addicto ſaltem aliquam adlatura.

Deſcriptio

Galeopitheci volantis.

Tab. I. et II.

Moles adultorum minoris felis, ſunt autem forma longiores et graciliores.

Caput oblongum, macilentum, minime buccatum, roſtroque vix adtenuato, obtuſo, rotundato. (*Tab. VIII. fig.* 1. *b.*) *Nares* lunatae, transuerſae, approximatae. *Labia* tenuia, ſuperius integrum, obſoleta ſtria inter nares exaratum. *Rictus* mediocris. *Pili* teneri per labia et mentum ſparſiſſimi, vix myſtacis nomine digni (*Tab. VII.*).

Os intus ſpatioſum. *Palatum* planiuſculum, laeue, medio longitudinali ſtria eleuatum, et transuerſis vtrinque rectiuſculis, circiter octonis ſcamnatum. *Carina* oris aequaliter concaua. — *Lingua* in faucibus tantum adnata, maximam partem libera, carnoſa, lata, depreſſa, rotundata, tenuiter papilloſa, extremo margine extenuato, papillis ciliato (vt in Didelphidum genere). *Funguli* duo obſoleti verſus baſin, et ſtria ſuperius verſus apicem longitudinalis (*Tab. VIII. fig.* 8.).

Den-

Dentes primores adultis in maxilla ſuperiore nulli; in *inferiore* ſex (*Tab VIII. fig.* 2. 5. *a a.*) pronati, diſtantes, lati, breues, margine pectinati, radice breui, conica, depreſſa, alueolis fragiliſſimis male inhaerentes. Horum par medium octies dentati, proximi nouies, extimi denticulis breuioribus, craſſioribus, obtuſis quinis.

Laniarii breuiſſimi, anomali, forma gloſſopetras contractas referentes, mucrone medio extus conuexi, acutiſſimi, et denticulis vtrinque circiter ternis ſerrati. Horum *infra verus* vtrinque tantum vnicus (*fig* 2. 5. *b b.*), proximus (*c.*) anteriore parte canino, poſteriore molaribus ſimilis; at *ſupra* laniarii duo (*fig.* 2. β. δ. 4. *c. d.*) quorum poſterior craſſior, maiorque molaribus adproximatus eſt; praeterea *acceſſorius* ante priorem denticulus tridentatus (*fig.* 2. α. *fig.* 4. *b.*)

Molares conferti, ſupra infraque quaterni, truncati, prominentiisque conicis muricati et inter ſe coëuntes (*fig.* 2. *et* 5. *d d. fig.* 4. *e—f.*).

In duobus *catulis* mihi viſis, quorum adultiorem exprimit *Tab. VII.* dentium primorum medii pectinata corona primi prominebant; reliquorum adhuc veſtigium nullum.

Oculi ad latera capitis maiusculi; fiſſura palpebrarum longitudinalis; *Cilia* nulla.

Auriculae tantum baſi vellere veſtitae, paruae, tenues, rotundatae, verſus meatum contractae; intus ſtriis

creberrimis, tranſuerſis, ſubtiliter ſcamnatae, vt in Veſpertilionibus.

Collum elongatum; *corpus* gracile, *thorax* ſterno planiuſculus, poſtice compreſſior.

Pedes primores (maxime antibrachio) longi, macilenti; omnes pentadactyli. *Tibiae* poſticorum curuatae, muſculis adductoribus laxe ab inguine deſcendentibus ſubadſtrictae femori.

Digiti palmarum magni, exteriores tres aequales, duo interiores gradu breuiores; *plantarum* aequales, praeter pollicem: omnes plano-compreſſi, dorſali margine cute continua nexi (*Tab. VIII. fig.* 1.), pollices paulo laxiore. *Vngues* (*fig.* 6. 7. *e e.*) maximi, flaueſcentes, compreſſolati, velut ſemicordati, ſubtus in argutam aciem extenuati et mucrone exquiſite incuruo, acutiſſimo adunci. In *Foetu* Muſei Lugduno-bataui (*Fig.* 1.) vngues vix extra cutaneas vaginas proruperant.

Pellis volatica a baſi maxillae inferioris incipit, ſenſimque in latitudinem expanſa pedibus omnibus, caudaeque veli inſtar obtenditur, tenuis, limbo craſſiuſculo, integerrima; ſuperne digitos connectit totos et in plantis arctius conſtringit, caudam vero vsque ad apicem fraenat atque vt in Veſpertilionibus, verſus abdomen intorquet.

Anus ad baſin caudae, in ſinu quem efformant plicae duo ab imo inguine verſus caudam conuergentes. *Penis* exos, cum *ſcroto* didymo ante pubem exſertus (*Tab. VIII.* *fig.*

fig. 1.). *Papillae mammarum* vtrinque in thorace geminae, ſupra ſecundam tertiamque coſtam approximatae, obſoletiſſimae maſculis. *Vberis* vtrinque ſolitarii veſtigia in femineis exuuiis notaui.

Vellus tenerum, breuipile, laeuiſſimum, ſubtus rariusculum, et in iunioribus vix vllum, vt in Lemurum, Simiarumque catulis prona parte ſemper nudis. *Sutura* pilorum inſignis a vertice, per ceruicem vsque ad ſcapulas fere longitudinalis. *Foetus*, quem delineaui (*Tab. VIII. fig.* 1.), plane depilis.

Color (cutis vbique albidus;) velleris in iunioribus (*Tab. VII*) ſubtus albo-pallidus; ſupra (vt icone expreſſum eſt) variegatus, e gryſeo-luteſcente cinereus, in capite immixtis pilis nigricantibus fuſceſcens. *Strigae* vtrinque duo atrae, parallelae, per pellem ceruicis dilatatam longitudinales, quae ad brachia in lineolas tenuiores ſparguntur. Dorſum et pars membranarum corpori proxima lineolis transuerſis nigris, ſupra ſcapulas et femora creberrimis et anaſtomoſantibus, virgato-reticulata. *Area* gryſeo-lutea, immaculata, ſupra genua pedum poſticorum. *Puncta* ſparſa nigra per ambitum membranae volaticae, praeſertim verſus caudam. In adulto Galeopitheco *Muſei Berolinenſis Friſchius* fuſcum depinxit vellus. Ego ſpecimen a Tineis totum depilatum inueni, vix apparentibus in dorſo paſſim reliquiis pilorum fuſco-gryſeorum.

Menſurae.

Specimen adultum *Muſei Academiae Berolinenſis*, extenſa nempe animalis pellis, ab extremo roſtro ad caudae

apicem aequat 1′. 9″. 6‴. caudae longitudo fere 7″. cranii pedumque magnitudo *Tab. VIII.* accurate expreſſa eſt.

Menſurae Speciminum iuniorum, quae ex *Muſeis Groueſteyniano* atque *Petropolitano* pro deſcriptione habui, comparatae hoc modo habent:

	In Specim. Muſ. Groueſt.		In Specim. Petropolit.
Longitudo corporis totius a roſtri extremo ad ortum caudae - -	6″. 6‴.	—	6″. 8‴.
—— caudae - - - - -	2. 9.	—	3. 1.
—— capitis, ad nucham - - -	2. 3.	—	2. 4.
—— —— circinno - - - -	1. 10.	—	- -
Diſtantia oculorum a naſi apice -	0. 10.	—	0. 10.
Longitudo ſciſſurae palpebrarum - -	0. 4.	—	0. $4\frac{1}{2}$.
—— interualli ab oculo ad aurem -	0. $4\frac{1}{2}$.	—	0. 5.
—— colli circiter - - - -	1. 2.	—	1. 3.
—— humerorum - - - -	1. 4.	—	1. $5\frac{1}{5}$.
—— antibrachii - - - -	1. 6.	—	1. $7\frac{1}{6}$.
—— carpi cum metacarpo - -	0. 6.	—	0. $7\frac{1}{6}$.
—— phalangum priorum - -	0. $3\frac{1}{3}$.	—	0. 4.
—— phalangum vltimarum - -	0. $4\frac{1}{2}$.	—	0. $4\frac{1}{4}$.
Latitudo verticalis phalangum media	0. $1\frac{1}{2}$.	—	- -
Longitudo vnguium ab articulo - -	0. 3.	—	- -
—— partis extra cutem prominentis -	0. $1\frac{2}{3}$.	—	- -
—— femorum - - - -	1. 2.	—	1. $3\frac{1}{4}$.
—— tibiarum - - - -	1. 5.	—	1. $6\frac{1}{4}$.
—— tarſi cum metatarſo - -	0. 9.	—	0. 9.
—— digitorum phalangis primae -	0. $2\frac{1}{4}$	—	0. 3.
—— —— ſecundae phalangis - -	0. 3.	—	0. $3\frac{1}{4}$.
—— vnguium - - -	0. $2\frac{1}{3}$.	—	- -
Inter pedum priorum expanſorum vngues	- -	—	9. 2.
—— —— poſticorum expanſor. vngues	- -	—	6. 4.

Ex

Ex *Foetu* tandem menſuras ſequentes conſignaui:

Longitudo tota ab apice roſtri ad extremum caudae	4″.	6‴.
—— —— caudae - - - -	1.	6.
Interuallum inter expanſas palmas - -	3.	10.
Diſtantia vmbilici a gula - - -	1.	8.
—— —— a genitali - - - -	0.	$3\frac{1}{2}$.

Reliquas proportiones figura exactiſſima (*Tab. VIII. fig.* 1.) fideliter exponit.

Anatomica.

Tab. VIII. fig. 2 — 7.

In vnico ſpecimine potui obſeruare *Hepar*, quod erat bipartitum: *dextra* portio integra, latior; *ſiniſtra* multo longior, ad lumbos longitudinaliter deſcendens, in tres fiſſa lacinias, quarum infima erat anguſtiſſima.

Linguam et *dentes* ſupra deſcripſi. *Cranium* praeſertim ſingulare: *plicis* a proceſſu ſupraciliari verſus occiput tendentibus, figura Zygomatis et ſuperioris maxillae, palati conſtitutione, aliisque *Tabulae* noſtrae *fig.* 1 — 4. graphice expreſſis. — *Coſtae* duodecim, quarum ſeptem verae. — Adſunt etiam in ſceleto *Clauiculae.*

Pedum digiti omnes, praeter falculam, biarticulati; ſed pollices tantum vnica phalange et oſſe metacarpi vel metatarſi breuiore et robuſtiore conſtant. *Phalanges* omnium digitorum *primae*, vt et phalanx pollicis (*Tab. VIII. fig.* 6. 7. *c c c.*) compreſſae, ſubarcuatae, ſubtus acie gemina, verſus extremitatem decreſcente criſtatae atque pro

tendinibus canaliculatae. *Extremae* phalanges (*d d d*) rectae, teretiuſcu ae, longiores. *Oſſicula ſeſamoidea* ad omnes articulos metacarpi cum phalangibus ſupernae; et cartilaginea *rotula* ad articulos priorum et extimarum phalangum ſubtus. *Falcularum* oſſicula (*e e e.*) ad condylum vsque cornea vagina obducta. — In plantis *os metatarſi* extimi digiti ad carpum obtuſe productum (*fig.* 7. *g*) vt in homine. *Tarſus* quoque (*a.*) aſtragalo (*f.*), quem includunt malleoli, et calcaneo (*b.*) humanae ſtructurae perſimilis. — *Radius* in anticis pedibus verſus carpum nullus, ſed ſola *vlna* (*fig.* 6. *A.*), ope carpi breuiſſimi (*a.*) metatarſo (*b.*) commiſſa; Radiis vero ſuperne vlnae coadunatus, vt in Veſpertilionibus.

In liquore aſſeruatis obſeruaui *muſculum* ſub axilla ortum, interne brachium legentem, a cubito inſigni tendine (*Tab. VIII fig.* 1. *a a.*) in velum late excurrere et comitantibus vaſis ſanguiferis ſpargi verſus marginem. Eodemque modo in Veſpertilionibus vaſa alas adeunt.

In poſticis pedibus *ſartorius* robuſtus, latus, a ſummo inguine oritur, et adtenuatus in tendinem anguloque ſubtenſus, tibiam fortiter adducit. *Flexores* etiam laxius femori accubant.

SER-

SERTVLARIAE
SPECIES DVAE DETERMINATAE.

Ab

I. LEPECHIN.

In parte poſteriore actorum Academiae pro ann. 1778 propoſui ſpeciem nouam ſertulariae ſub nomine *ſertulariae obſoletae* circa promontorium *Kanin Nos* lectae; nunc in medium profero nouas ſpecies duas, ibidem repertas, quae primo intuitu referunt ſpecies ſertulariae iam ſatis clare deſcriptas atque delineatas ſub nomine *ſertulariae abietinae* et *ſertulariae cupreſſinae* (a). Aſt multae adſunt notae characteriſticae, quae noſtras a dictis ſeparandas ſuadent; quaeque familiam ſertulariae adaucturae, propriam ſibi denominationem iure expoſtulant. Prima igitur earum eſto.

Sertularia pinaſter.

Sertularia pinnata, pinnis ſubalternis, cylindricis; ob calyculos plerumque ſexfariam diſpoſitos, echinatis; ouariis vtricularibus turgidis, ſubdiaphanis, oſculo ſimplici.

De-

(*) Confer celeberrimi *Pallas* Elenchi Zoophytor. p. 133. no. 81. et pag. 141. no. 89.

Deſcriptio.

Pro radice inſeruiunt ipſi fibrillae reptantes, teſtaceis aut lapillis infixae. Ex his exeunt ſtirpes cornei, vt plurimum ſimplices, aliquando inferne diuiſi, verſus inferiora coloris brunnei, ſed quo magis aſcendunt, eo pellucidiores atque luteſcentes euadunt, extrema tamen eorum tanquam aduſta apparent; altitudo vix vltra dimidium pedem excurrit. Ramuli alternatim pinnati, rotundi, filiformes, inter denticulos caulis, plerumque ternos, albicantes oxoriuntur. Calyces non, pro vti in *ſertularia abietina* appoximate alterni, ſed vndique ramulos, et plerumque ſexfariam, ambiunt, oſculoque ocute effuſo, prominulo, eos echinatos reddunt, ita vt fere ramulos defoliatos pinaſtri referant. Ouaria non raro per vtrumque latus ita denſe diſpoſita, vt quaſi imbricata videantur, vtricularia, ſubdiaphana, verſus ſuperiora obſcure flaua, oſculo ſimplici, annulo craſſiore brunneo cincto. Fig. 1. repraeſentat partem trunci cum ramulo per mycroſcopium adauctos, (*a*) calyculum ſeparatum, (*b*) ouarium. Fig. 2. habitum et magitudinem naturalem.

II.

Sertularia Cupreſſoides.

Sertularia caule paniculato, ramis dihotomis ſparſis, calyculis vix oſculo priminulo, ſimplicibus, oblique truncatis, ouariis ouatis oſculo ſubtubuloſo, trunco ramisque articulatis, commiſſuris biannulatis.

De-

Deſcriptio.

Radiculam format tuberculum applanatum cartilagineum. Caules ſimplices, aliquando inferne ramoſi, ſubdiaphani, coloris flauicantis, vix pedem dimidium excurrentes, articulati, articulis ſeu commiſſaris omnibus biannulatis. Rami paniculam efformantes, vlta medium caulem plerumque detriti, vti in ſertularia Thuia, exeunt ex caule alternatim oppoſiti, modo ex omnibus plagis protruſi, patentes, crebri, ramulorum ſurculis eandem diuiſionem ſeruantibus. Huc vsque fere omnia ſertularia noſtra habet communia cum *S. Cupreſſina.* Aſt rachis ramulorum multo latior et minus ſerrata eſt in noſtra, quam in illa; quia calyculi veſiculares oppoſiti vix prominuli oſculo, quod eſt ſimplex, oblique truncatum, ariſtis denticulisque nullis. Ouaria ex oblongo ouata, baſi ſubattenuata, ſubdiaphana tenerrime - rugoſa, modo e latere dextro, modo ex ſiniſtro, non raro per vtrumque diſpoſita.

Fig. 3. Siſtit ramulum per mycroſcopium auctum (*a*) calyculos ſeparatos. (*bb*) ouaria. (*c*) comiſſuras articulorum biannulatas, Fig. 4. habitum et magnitudinem naturalem.

ADIPIS PORCINAE, RECENTIS ET RANCIDAE, EXAMEN CHEMICVM.

Auctore

I. G. GEORGI.

§. 1.

Quamuis pinguedo in omnibus adeo animalibus abundet, et magnam in ſano, morbidoque eorum ſtatu vim exſerat, quantumuis etiam in Oeconomia praeſtat vtilitatis: attamen pauca circa illam in chemicis acta ſunt, neque, quod ſciam, rancidus adipoſae ſubſtantiae ſtatus a quopiam minutioſe examinatus fuit. Suggeſſit autem Clariſſ. D. *Oraeus*, qui in Peſte Moſcuam Anno 1772. deuaſtante famam inſignem aſſecutus eſt, multum lucis acceſſurum theoriae morborum epidemicorum, e conſideratione corrupti ſtatus adipis, quam inſignem in his morbis ſcenam ludere ex obſeruationibus ſuis perſuaſus eſt; et hinc nata eſt adipis analyſis quam hic trado, quaeque niſi omnia Phyſiologiae atque Therapiae dubia ſoluat, tamen ad illuſtrandum huius animalis ſubſtantiae naturam qualitercunque conducere poterit.

§. 2.

§. 2. Deficiente mihi pro experimentis inſtituendis adipe humana pura, quam *Pharmacopoea Roſſica* Anno 1778 edita e ſerie officinalium iure excluſit, *Suillam adipem* pro analyſi elegi, cuius natura ad iſtam propius accedit et quam in ſufficienti copia iam rancidam, adeoque ſtatim experimentis aptam, obtinere facile erat. Praeterea ſuilla adeps nondum a quoquam examini chemico ſubiecta fuit; humana autem ſaepius et accurate a Celebb. Viris *Rhades* (*a*), *Segner* (*b*) et *Crell* (*c*). Neceſſaria autem pro comparatione fuit analyſis adipis etiam recentis, quam igitur prius exponam.

Experimenta circa adipem Suillam recentem inſtituta.

§. 3. Animalium diuerſorum pinguedines, quae conſiſtentia inter ſebaceam ſolidam et oleoſam fluidam media occurrunt, conueniunt in genere cum reliquis pinguedinoſae ſubſtantiae ſpeciebus: inſolubilitate ad menſtrua aquoſa et ſpirituoſa; ſaponificatione cum ſalibus alcalicis; productione hepatis ſulphurei, per coctionem cum ſulphure; diſſolutione plumbi calcinati in ſpeciem vnguenti vel ſaponis; coagulatione cum acidis mineralibus concentratis; plenaria conſumptione per ellychnium lampadis vel candelae; ignitione ſpontanea in calore ſexcentorum circiter graduum ſcalae Farenheitianae, aliisque; differunt autem inter ſe conſiſtentia, colore, guſtu, magis vel minus prompta ranciditate; quae quidem differentiae ſenſibus noſtris facile, at vix chemicis experimentis deteguntur, quippe quae nimium deſtruunt, et

 gene-

(a) Diſſ. de Ferro in Sanguine humano 4. Gott. 1753.

(b) Segneri Diſſ. de Acido pinguedinis, Reſp. Kop. 4. Gott. 1754.

(c) Crell. *Chemiſch Journal.* P. I. p. 102.

generatim ex omni pinguedine tantum oleum empireumaticum, phlegma acidum et carbonem igni reſiſtentem producunt. Horum principiorum proportio, nec non indoles in variis adipis ſpeciebus tantum differt, vt in chemica quoque analyſi facile occurrat. *Segnerus* (Diſſ. de Acido Pinguedinis) adipem ſuillam dicit deſtillatione vix quidquam phlegmatis ſuppeditare, carbonis autem ita parum ex eo ſupereſſe, vt oleum eductum fere aequet pondere maſſam adipis adhibitae. Hinc inſignis ab aliorum animalium pinguedine differentia ſequeretur; experientiae autem non reſpondet *Segneri* aſſertum, vt in ſequentibus apparebit.

Experimentum 1.

§. 4. Adeps ſuilla recens et pura comminuta, in retorta arenae impoſita, lento calore ſolui, et tranquille ſoluebatur, nullo aëris indicio dato. Chartae probatoriae in collo retortae ſuſpenſae (caeruleae inducta rubedine) indicabant, etiam leni caloris gradu *acidos* emanaſſe *vapores*.

Experimentum 2.

§. 5. Diſſoluta calore, perque linteum caute percolata adeps, aquam tepidam copioſam, qua abluebatur, pinguinoſe turbidam reddidit. Illa aqua percolata et euaporata, reſiduam dedit *mucaginem cineream*, ex vnciis decem pondus quadraginta granorum aequantem, ſine vllo Salini cuiusdam indicio.

Experimentum 3.

Adipis vncia, in quatuor vnciis alcoholis digeſta, tincturam flaueſcentem effecit, quae aquam inſtillata turbabat, indicio, *oleoſi* quiddam ſolutum fuiſſe.

Expe-

Experimentum 4.

§. 6. Adipis ſuillae recentis, igne ſolutae, decem vnciae e retorta, recipiente adglutinato inſtructa, ſenſim aucto in balneo arenae et demum fortiſſimo igne deſtillaui. Intra octodecim horarum ſpatium prodiit:

1. *Oleum flaueſcens butyroſum* ad ℥iiß.
2. *Oleum nigricans fluidum* ad ℥jv. ʒvj. et cum vtroque, praeſertim ſimul cum priore.
3. *Phlegma acidum*, flauum, cuius pondus ſegregati aequauit ℥j. ʒvij. Reſiduum fuit Carbo niger, durus, quem in retorta integra reliqui. Oleum, praeſertim illud butyroſum, odore volatili intolerabili, pungente et ſuffocante emicabat, et vaporibus oculos et guttur adficiebat. Chartae coloratae acidam horum vaporum indolem indicarunt, quare oleum quatuor circiter unciis aquae ablutum, et aqua dehinc ſeparata fuit. Phlegmatis odor etiam volatilis erat, ſed minus acer.

Experimentum 5.

§. 7. Oleum ablutum praecedentis proceſſus ſupra carbonem reſiduum cohobaui. Sic prodiit:

1. Oleum fluidius, fuſco-flauum et
2. Dein Oleum nigreſcens, vtriusque ℥vjß. quae odorem minus volatilem, raphani ruſticani aemulum edebant;
3. Phlegmatis ℥iiß, flaui, acidi, priori ſimilis.

Experimentum 6.

Oleum, propter vapores acidos, denuo ablutum et iterum ſuper reſiduo cohobatum fuit. Prodiit tunc e fuſcouireſcente colore, pondere ſex vnciarum; Phlegmatis autem ſemidrachma adfuit. Reſiduum praecedentium trium deſtillationum *Caput mortuum* pondus vnciae cum ſeſquidrachma aequauit. Oleum iterum ablutum fuit.

Experimentum 7.

§. 8. Oleum tertiae deſtillationis, denuo e Retorta noua deſtillabam. Tranſiit ſtatim Oleum flauum, limpidum, tenue, boni odoris, quantitate ℥ i i ß. dein rubro-flauum, magis empireumaticum ad ℥ i i j. ſimul cum vtroque Phlegmatis ʒ ß. Adfuit iterum reſiduum carbonaceum pondere ſesquidrachmae, quod cum priore effecit pondus unciae cum tribus drachmis. Phlegmatis quatuor ſimul deſtillationum prodiere ad ℥ i j. ʒ j ß. Amiſſum igitur his proceſſibus fuit pondus ʒ v i i ß.

§. 9. Olea praecedentis experimenti, ſibi relicta, intenſiorem ſenſim acquiſiuerunt colorem, tandemque turbida ſunt facta. Vlteriora in hoc oleo tentamina non inſtitui, cum perfecte eſſet ſimile illi quod e ſebo bouillo obtinuit et accurate examinauit Cel. *Crell* (Chem. Iourn. I. p. 75).

Experimentum 8.

§. 10. A Phlegmate quatuor deſtillationum (Exp. IV. ad v i j), itidem ab aqua, qua Oleum iterato ablutum

tum fuit, flocculi ſeceſſerant, quos filtro ſeparaui. Reagentia in liquidis ſolam acedinem, pinguinoſitati iunctam indicarunt.

Quandoquidem vero acidum pinguedinis ſola deſtillatione depurari et concentrari nequit, ſaturaui liquorem contrito et puriſſimo ſale tartari (e nitro et cryſtallis tartari), quod huius ſalis ſesquidrachma exactiſſime effectum eſt. Liquor ſaturatus euaporatione nullas produxit cryſtallos, ſed ſal informe, nigreſcens, empireumatici odoris, aërei humoris bibulum, quod pondus ʒii. gr. XL. aequauit.

In vaſe porcellaneo hic Sal fluxit facillime, fumans et ſpumeſcens inſigniter. Poſtquam ceſſauerat fumus, reliquum ſolutum et per filtrum traiectum euaporavi. Iterum defuit forma cryſtallina, ſed maſſa ſalina lamelloſa remanſit, quae non ſatis ſaturata, humidum aëris attraxit. Tubo ferruminatorio oppoſita intumeſcebat eadem, fumum luminoſum emiſit et reſiduum mere alcalicum album tandem exhibuit.

Illuſtr. *Segnerus* (Diſſ. citat.) et Cel. *Crell* (l. c. p. 60. Part. II. p. 112 et IV. p. 47.) ſolita ſua diligentia et acumine *acidi pinguedinis* naturam, eiusque ad alcohol, ſalia varia, terras et metalla relationem indagarunt, vt vlteriora in hoc tentamina ſuperflua mihi viderentur; neque exigua e ſalibus ſaturatis expulſa acidi copia ſufficiebat. *Crellius* praeterea (loc. cit.) docuit ingenioſe, quomodo acidum illud e vulgari ſapone copioſe parari poſſit.

§. 11.

§. 11. *Carbonaceum reſiduum* Exper. 6 et 7, cuius coniunctim pondus vnciam cum tribus drachmis aequabat, erat exaridum, nigrum, durum, quaſi ſcorificatum; empireuma oluit et cum acidis efferbuit. Hoc pulveriſatum ſequentibus experimentis inſeruiit.

Experimentum 9.

Elixivatio ope aquae praebuit liquorem alcalinum album, e quo grana quinquaginta ſalis imperfecte cryſtalliſati obtinui, quod in aëre ſiccitatem ſeruauit. Acidi vitriolici ad ſaturationem huius ſalis tantundem inſumſi, quantum ad eandem quantitatem ſalis alcali mineralis requiritur; proditque inde ſal mirabilis Glauberi perfectus. Durante ſaturatione nihil calcarei neque heterogenei praecipitabatur. Reſiduum carbonis deſiccatum vix euidenter cum acidis ferueſcebat.

Experimentum 10.

§. 12. Elota terra carbonum nigra (Exper. IX.) a relicto *phlogiſto* erat depuranda, quod calcinatione in teſta quinque horarum ſpatio ad continuum ignem lambatorium, et circumagitatione continua vix effectum eſt. Primum cinerea ſic euaſit, dein rubeſcens, leuiorque vt ponderis tantum ℨj. cum gr. XII. ſupereſſet. Ex hiſce cineribus particulae copioſae *Magneti* adhaereſcebant; cum acidis efferueſcebant acriter et elotae ope aquae deſtillatae, iterum gr. v ß Salis alcali mineralis puri exhibuerunt.

Experimentum 11.

§. 13. Terra edulcorata (Exper. 10.) cum acidis etiamnum ferueſcebat, ideoque in tribus drachmis acidi nitroſi

nitroſi digeſta fuit. Phlegma acidum percolatum et aqua ad edulcorandum reſiduum terreum adhibita, ſolutione Salis tartari ſaturabantur. Circa ſaturationis punctum apparuit demum praecipitatum quoddam albidum, quaſi mucilaginoſum, quod edulcoratum et ſiccatum gr. XI. pondus aequabat et pura fuit *terra calcarea.* Ex reſiduo denique *particulae* adhuc *martiales* ſatis copioſe magneti adhaeſerunt.

Experimentum 12.

§. 14. Vt praeſens forte pars argilloſa huius terrei reſidui in apricum educeretur, cum drachma Olei Vitrioli digeſtum fuit; tum effuſum acidum in porcellaneo vaſe arenae impoſito ſupra ignem euaporaui, relictam vero inſolubilem partem aqua edulcoraui. Praecipitatum ablutum argilloſam quidem, ſeu *aluminarem terram* referebat, ſed fuſcam, licet nullas particulas magneticas praeberet. Pondus ſiccati fuit granorum trium cum dimidio.

Relicta vltimo terra ſubtiliſſimam *arenam quartſoſam* referre viſa eſt, ferro plane carebat et pondus ℈ß et iv granorum aequauit.

Experimentum 13.

§. 15. Haec eadem reſidua terra cum drachma et XL granis ſalis tartari intrita et crucibulo candenti infuſa, ſtatim cum intumeſcentia fluxit. Scoria vitrificata refrigerata humore aëris madeſcere viſa eſt; cum crucibulo aquae immiſſa in gelatinam cineream diſſoluta fuit, e

 qua

qua, copioſiore adhibita aqua, gr. xxxiiß *terrae ſiliceae* ſordide albae, obtinui.

§. 16. Secundum allegata experimenta patet:

1. *Vapores* adipis ſuillae recentis dum ſupra ignem difſfluit, *acidos* eſſe (Exp. 1.).

2. In decem unciis eiusdem adipis recenter igni diſſolutae *mucilaginis* grana XL, dum exſiccatur, contineri (Exp. 2.).

3. Eandem quantitatem adipis non ablutae deſtillatione praebere, poſt quatuor cohobationes, vncias quinque cum dimidia *veri olei* tenuiſſimi, haud ingrate olentis (Exp. 7.); porro

4. Phlegmatis acidi iisdem deſtillationibus prodire ℥ij ʒiiß, quod ſimul cum aqua acidula, ad abluendum oleum adhibita (Exp. citat.) *veri acidi* continet grana XLV.

5. Poſt quartam deſtillationem ſupereſſe ex ſupra dicto quanto adipis *carbonis fixi* vnciam cum tribus drachmis (Exp. 6. 7.); in quo contenta erant:

a. Salis alcali mineralis gr. LV. (Exp. 9. 10.).
b. Terrae calcareae gr. XI. (Exp. 11.)
c. - - aluminis gr. iiiß. (Exp. 12.)
d. - - ſiliceae gr. XXXII. (Exp. 13.), atque
e. - - particulae martiales magneti adhaereſcentes (Exp. 11.)

f. Bal-

f. Calcinatione carbonis periiſſe phlogiſti ad ℨix. et particulas etiam fixas diſſipatas variis proceſſibus.

Pondus ſeptem cum dimidia drachmarum, quod in deſtillationibus euaporatione vel adhaeſione ad vaſa chemica amiſſum fuit, itemque gr. xxxi, quae in analyſi reſidui perierunt, ſupra enumeratorum productorum et conſtitutiuarum partium pondera proportione iuſta augere debent.

§. 17. E *ſebo bouillo* Cel. *Crell* (Diar. chem. P. I. p. 68.) eadem fere proportione obtinuit *oleum* poſt deſtillationum ſimilem numerum, et *Phlegmatis acidi* tantundem, in quo etiam acidi paene eadem quantitas contenta fuit, vt in phlegmate ſuillae adipis. *Carbonacei* autem reſidui maior fuit copia in experimentis *Crellianis*, ſcilicet e triginta duobus vnciis ſebi, decem vnciae cum ℨvj. carbonis. E carbone idem *terrae calcareae* et *ſiliceae* tantillum cum veſtigio *terrae argilloſae* obtinuit. Sal e carbone elixiuatus, erat *acidum phoſphoreum*, terra calcarea ſaturatum. Ferri nullum aderat veſtigium.

Differt igitur *ſebum bouillum* a porcina adipe:

1. Maiore terrei fixi copia,
2. Sale phoſphoreo et
3. Martialium particularum defectu.

Porcina vero *adeps priuum* habet 1 *Sal Alcali minerale* et 2 *Particulas martiales*.

* * * * * * * * *

Experimenta digeſtione recentis Adipis Porcinae inſtituta.

§. 18. Sequentia experimenta inſtituta ſunt, vt obſeruarem mutationes, quas in recenti adipe calor moderatus, febrili circiter aequalis, diu continuatus, produceret.

Experimentum 14.

Adipis ſuillae recentis ſumſi vncias XVI. et in retorta, veſica obturata, in balneo arenae, ſuſtentato, lampadis ope, calori aequabili, inter 98 et 106 gradus Thermometri *Farenheitnani* medio, commiſi. Poſt quatriduum ſedimentum tenaciuſculum, nigreſcens ſeceſſit. Octiduo adeps ſupra ſedimentum flaua facta eſt, vt exempta particula et refrigerata pulchre flaueſceret; poſtea color ſenſim in fuſcedinem tendere coepit. Subinde chartae coloratae in retorta ſuſpenſae fuerunt, quae acidam vaporum indolem prodebant. Poſt decimam diem ſubinde bullae aëreae in adipe aſſurgebant.

Poſt ſeptemdecim dierum digeſtionem adeps refrigerata, ſupra exiguum ſedimentum nigreſcens fuſcida erat facta, guſtu vappida, foetorem nauſeoſum ſubuolatilem ſpargens, qui oculis nocere, eosque obfuſcare viſus eſt.

Expe-

Experimentum 15.

§. 19. Vt experirer, nonne portio adipis digeſtione in *mucilaginem* mutata fuerit, itemque an adeps ablutione denuo reſtitui in priſtinum ſtatum poſſet, vncias eius binas ſaepius aqua feruida ablui curaui, et refrigeratam ſingulis vicibus aquam effudi. Prima aqua nauſeoſi erat odoris, absque ſalſedinis indicio vllo; ſequentium ablutionum aqua pinguinoſo-turbida, quaſi mucilaginoſa euaſit. Poſt filtrationem trans linteum euaporata reliquit *mucum cinereum,* cuius ſiccati pondus drachmam aequauit, quique facile aqua diſſoluebatur. Adeps nunc euaſit cinerea, ſine odore nauſeoſo, multum quidem emendata, at non ad priſtinum gradum.

Experimentum 16.

§. 20. Digeſtae adipis vncia, cum quadruplo alcoholis digeſta, tincturam effecit guſtu et odore admodum nauſeabundam, quae inſtillata aquae lacteſcebat, poſteaque guttulas oleoſas in ſuperficie formabat.

Experimentum 17.

§. 21. Decem vnciae adipis recentis, digeſtionem paſſae, e retorta balneo arenae impoſita, inſtar recentis Experimento 4. adipis deſtillatae ſunt. Initio ſtatim aëris bullae copioſae aſcenderunt; tranſiit mox *oleum butyraceum,* ſordide flauum, dein fluidius coloris ſaturati, ſimul vtriusque vnciae ℥viiß. cum ſocia *phlegmatis* vncia. Olei pariter et phlegmatis odor volatilis, pungens, attamen

 multo

multo minore gradu quam recentis, crudae adipis (Exper. 4.). Vapores olei chartis tinctis notam acedinis impreſſerunt, vnde aliquod aquae vnciis illud ablui, quod de ſubſequentibus etiam deſtillationibus intelligi volo.

Experimentum 18.

§. 22. *Oleum* praecedentis tentaminis ſupra proprium carbonem cohobaui. Tranſiit limpidum, obſcure flauum et pondus vnciarum ſex aequauit. Simul prodiere Phlegmatis acidi drachmae tres. Vtriusque producti odor minus pungens fuit quam e prima deſtillatione.

Experimentum 19.

Oleum illud tertio per eandem retortam, carbone intus loricatam, cohobatum tranſiit limpidum, obſcure flauum, pondere vnciarum V. et totidem drachmarum. Acidi phlegmatis ſimul prodiit ſesquidrachma. Vtrisque odor fuit parum empyreumaticus.

Carbo, a tribus hiſce deſtillationibus reſiduus, qui fractae Retortae intus intime adhaerebat, pondus ℥ i ß aequauit. Similis illi, quem recens praebuit adeps, neque vlterius, vti nec oleum deſtillationes paſſum, chemice examinatus fuit.

Experimentum 20.

§. 23. *Phlegma* ex his deſtillationibus (Exp. 16. 17. 19.) collectum effecit menſuram ſeſcunciae cum ſemidrachma;

drachma; flauum, volatile, empireumatico odore, in chartis probatoriis acidi effectus exſeruit. Aliquantum acidi etiam aqua prodebat, (Exp. citat), quae abluendo oleo inſeruierat. Vtrumque igitur liquorum ſale tartari puro, contrito ſaturaui exactiſſime eoque quinquaginta grana ſalis huius adhibui. Liquor filtratus neutraliſatus, praebuit ſalem ſimillimum illi, quem adeps recens (Exp. 8.) ſuppeditauerat, drachmam cum quadraginta granis aequabat, et nulla vlteriore depuratione curatus fuit.

§. 24. Igitur decem vnciis adipis recentis, digeſtione tractatae, continebatur:

1. *Mucilago*, cuius deſiccatum pondus aequauit drachmas V. (Exp. 15.)
2. *Phlegma acidum*, tribus deſtillationibus ad ℥iß. ʒß. (Exp. 17 – 19.) idque, ſimul cum lotura olei, grana quinquaginta *acidi* dedit.
3. *Oleum* pellucidum rufo-flauum, quod poſt tertiam deſtillationem (Exp. 19.) pondus ℥v et ʒv. aequavit:
4. *Carbonis* terrei eodem Exp. 19. ſuperfuit ſeſcuncia.

Producta igitur, pondere maſſae adhibitae drachmarum quinque et dimidiae valore minora fuerunt, iuſtaque ex hoc amiſſo pondere proportione augenda ſunt.

Si cum his conferas producta adipis recentis non digeſtae, apparebit:

1. Ran-

1. Ranciditatem inſignem digeſtione fuiſſe inductam adipi (Exp. 14. cet.);

2. Mucoſitatem maiorem ortam, et muci plus ſeceſſiſſe (Exp. 15.);

3. Acidi partem deſtructam (Exp. 20.):

Supereſt nunc analyſis comparatiua adipis ſponte rancidae factae, quam in altera huius Diſſertationis parte propediem exponam.

DETER-

ASTRONOMICA.

DETERMINATIO FACILIS
ORBITAE COMETAE
CVIVS TRANSITVM PER ECLIPTICAM BIS OBSERVARE LICVIT.

Auctore
L. EVLERO.

§. 1.

Quod ſi eueniat vt cuiuspiam Cometae vterque tranſitus per planum eclipticae obſeruari poſſit, etiamſi hoc rariſſime contingat, tamen iſte caſus ideo ſumma attentione dignus eſt cenſendus, quod duae tales obſeruationes ſufficiant, ad orbitam Cometae parabolicam perfecte determinandam, idque methodo directa; ita vt ad nullas approximationes ſit confugiendum, dum contra ex aliis obſeruationibus motus Cometarum neutiquam methodo directa definiri poteſt, ſed demum poſt plura tentamina appropinquando erui ſoleat, atque adeo ſperari nequeat, vnquam fore, vt eiusmodi methodus directa detegatur, cuius ope ex aliquibus obſeruationibus orbitae Cometarum certo determinari queant.

§. 2. Ponamus igitur eiusmodi Cometam apparere, cuius tranſitum per eclipticam bis obſeruare liceat, ita vt eius latitudo in vtraque obſeruatione nulla fuerit deprehenſa. His igitur temporibus neceſſe eſt vt Cometa in ipſa linea nodorum ſit verſatus; altero ſcilicet in nodo aſcendente, altero vero in deſcendente, cuiusmodi igitur duas
Tab X. obſeruationes ſequenti modo ad calculum reuocemus. Re-
Fig. 1. praeſentet tabula planum eclipticae, in quo punctum S ſit centrum Solis, ac tempore prioris obſeruationis Terra fuerit in puncto T, ponaturque eius diſtantia a Sole $ST = a$; cometa autem apparuerit in directione T Z, atque innoteſcet angulus S T Z, quem vocemus $= \alpha$. Cum igitur cometa nullam habuerit latitudinem, neceſſe eſt vt alicubi in ipſa linea T Z haeſerit, cuius locum ponamus fuiſſe in puncto Z, eritque recta ex Sole ducta S Z ☊ linea nodorum, ſiue interſectio orbitae Cometae cum ecliptica, cuius poſitio cum etiamnunc ſit incognita, vocemus angulum $TS☊ = \Phi$, quae adeo erit vnica incognita, quam in calculum introduci neceſſe eſt. Hinc igitur erit angulus externus $TZ☊ = \alpha + \Phi$, vnde cum habeatur diſtantia $ST = a$, reperietur diſtantia Cometae a Sole $SZ = \frac{a \sin. \alpha}{\sin. (\alpha + \Phi)}$.

§. 3. Iam elapſo tempore $= \Theta$, quod exprimamus per motum medium Solis interea percurſum, ita vt Θ deſignet certum quendam angulum, cuius menſura ſit arcus ipſe Θ in circulo cuius radius $= 1$, dum huius circuli tota peripheria 2π repraeſentat quantitatem vnius anni, cometa iterum in ipſa ecliptica ſine latitudine obſeruetur; interea autem Terra progreſſa ſit per angulum $TST' = \theta$; cometa vero apparuerit in directione $T'Z'$, exiſtente angulo $ST'Z' = \alpha'$. Neceſſe igitur eſt vt hoc tempore Cometa

meta verſatus ſit in linea nodorum ☊ S retro S ☋ continuata, atque adeo in ipſo puncto Z'. Cum igitur ſit angulus T' S Z' $= 180° - \Phi - \theta$, erit angulus externus T' Z' ☋ $= 180° + \alpha' - \Phi - \theta$, ideoque ipſe angulus T' Z' S $= \Phi + \theta - \alpha'$. Poſita igitur diſtantia S T' $= a'$, fiat

$$\text{ſin.}\,(\Phi + \theta - \alpha') : a' = \text{ſin.}\,\alpha' : S\,Z',$$

vnde colligitur diſtantia $S\,Z' = \frac{a'\,\text{ſin.}\,\alpha'}{\text{ſin.}\,(\Phi + \theta - \alpha')}$. Sic itaque nacti ſumus duas Cometae a Sole diſtantias, ſcilicet

$$S\,Z = \frac{a\,\text{ſin.}\,\alpha}{\text{ſin.}\,(\alpha + \Phi)} \text{ et } S\,Z' = \frac{a'\,\text{ſin.}\,\alpha'}{\text{ſin.}\,(\Phi + \theta - \alpha')}$$

quae adeo in directum ſibi ſunt oppoſitae, ita vt anomalia vera inter haec duo loca interiecta ſit 180°.

§. 4. Referat nunc tabula planum ipſius orbitae cometae, in quo ſit S centrum Solis et recta ☊ ☋ interſectio orbitae cometae cum plano eclipticae, in qua ſint puncta Z et Z' bina illa loca Cometae obſeruata. Hic autem ponamus diſtantias $S\,Z = f$ et $S\,Z' = g$, ita vt ſit Tab. X. Fig. 2.

$$f = \frac{a\,\text{ſin.}\,\alpha}{\text{ſin.}\,(\alpha + \Phi)} \text{ et } g = \frac{a'\,\text{ſin.}\,\alpha'}{\text{ſin.}\,(\Phi + \theta - \alpha')},$$

in quibus formulis vnica ineſt quantitas incognita, ſcilicet angulus Φ. Praeterea vero nouimus, cometam de loco Z perueniſſe in locum Z', elapſo tempore $= \Theta$. Sit igitur parabola Z Π Z' orbita a cometa interea deſcripta, cuius axis ſit recta Π S, ideoque Π eius perihelium, cuius diſtantia a Sole ponatur $S\,\Pi = p$, ideoque ſemiparameter orbitae $= 2p$; tum vero vocemus angulum $\Pi\,S\,Z = \psi$, eritque angulus $\Pi\,S\,Z' = 180° - \psi$. Hinc iam ex natura parabolae erit

$$S\,Z = f = \frac{2p}{1 + \text{coſ.}\,\psi} = \frac{p}{\text{coſ.}\,\frac{1}{2}\psi^2}$$

$$S Z' = g = \frac{2p}{1 - \text{coſ.}\,\psi} = \frac{p}{\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\psi^2}$$

ex quibus aequationibus tam diſtantia p quam angulus ψ facile determinabuntur, ſiquidem quantitates f et g vt cognitae ſpectentur.

§. 5. Cum igitur ex priore aequatione ſit $\text{coſ.}\,\frac{1}{2}\psi^2 = \frac{p}{f}$, ex poſteriore vero $\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\psi^2 = \frac{p}{g}$, his additis ſit $\frac{p}{f} + \frac{p}{g} = 1$, ita vt ſit $p = \frac{fg}{f+g}$; quo valore inuento erit $\text{coſ.}\,\frac{1}{2}\psi^2 = \frac{g}{f+g}$ et $\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\psi^2 = \frac{f}{f+g}$; vnde colligitur $\text{tang.}\,\frac{1}{2}\psi = \sqrt{\frac{f}{g}}$ et $\text{ſin.}\,\psi = \frac{2\sqrt{fg}}{f+g}$. Dummodo igitur binae diſtantiae f et g fuerint cognitae, orbita parabolica Cometae perfecte erit determinata. Verum quia ipſae diſtantiae f et g adhuc incognitam, ſcilicet angulum Φ, inuoluunt, inſuper indigemus vna aequatione, cuius ope etiam hanc incognitam determinare liceat.

§. 6. Iſtam autem nouam aequationem nobis ſuppeditat conſideratio temporis Θ, quo Cometa de loco Z per Π vsque ad Z′ peruenit, quandoquidem huic tempori area a Cometa interea deſcripta eſt proportionalis. Quod ſi enim haec area ponatur $Z\,\Pi\,Z' = S$, ac diſtantia Terrae a Sole media deſignetur littera c, quia huius orbitae ſemiparameter eſt $= 2p$, ex theoria motus planetarum conſtat fore $S = \frac{1}{2}\Theta c \sqrt{2cp}$; quamobrem tantum opus erit vt in quantitatem huius areae inquiramus.

§. 7. Quoniam poſuimus angulum $\Pi S Z = \psi$, vocemus tantisper diſtantiam $S Z = z$, et quia ex natura para-

parabolae eſt $z = \frac{p}{\text{coſ.}\, \frac{1}{2}\psi^2}$, quaeramus primo aream $\Pi S Z$, quam deſignemus per Σ, ita vt ſit $d\Sigma = \frac{1}{2} z z\, d\psi$, eritque

$$d\Sigma = \frac{\frac{1}{2} p p\, d\psi}{\text{coſ.}\, \frac{1}{2}\psi^4}.$$

Ad hanc formulam integrandam ſtatuamus tang. $\frac{1}{2}\psi = t$, eritque

$$\text{ſin.}\, \tfrac{1}{2}\psi = \frac{t}{\sqrt{(1+tt)}} \text{ et coſ.}\, \tfrac{1}{2}\psi = \frac{1}{\sqrt{(1+tt)}};$$

et $\frac{1}{2} d\psi = \frac{dt}{1+tt}$, ideoque habebimus

$$d\Sigma = pp.\frac{dt}{(1+tt)\,\text{coſ.}\, \frac{1}{2}\psi^4} = pp\,dt\,(1+tt),$$

vnde integrando nanciſcimur aream $\Sigma = ppt + \frac{1}{3} ppt^3$, exiſtente ſcilicet $t = \text{tang.}\, \frac{1}{2}\psi$.

§. 8. Hinc autem facile deriuatur altera area $\Pi S Z'$, quam vocemus $= \Sigma'$, ſi modo in formula praecedente loco ψ ſcribamus $180° - \psi$, ideoque loco $\frac{1}{2}\psi$ ſcribendum erit $90° - \frac{1}{2}\psi$, cuius tangens cum ſit cot. $\frac{1}{2}\psi = \frac{1}{t}$, ſtatim reperitur area iſta $\Sigma' = \frac{pp}{t} + \frac{pp}{3t^3}$. His igitur duabus areis iungendis colligitur tota area

$$Z\Pi Z' = S = \Sigma + \Sigma' = \frac{pp}{3t^3}(tt+1)^3.$$

Cum igitur ſit $S = \frac{pp}{3}\left(\frac{tt+1}{t}\right)^3$, angulum ψ iterum introducendo erit

$$S = \frac{pp}{3}\left(\frac{1}{\text{ſin.}\, \frac{1}{2}\psi\ \text{coſ.}\, \frac{1}{2}\psi}\right)^3 \text{ ſiue}$$

$$S = \frac{pp}{3}.\left(\frac{2}{\text{ſin.}\,\psi}\right)^3 = \frac{8pp}{3\,\text{ſin.}\,\psi^3}.$$

§. 9.

§. 9. Hac igitur area S inuenta relatio ſupra memorata inter tempus et hanc aream nobis ſuppeditat hanc aequationem:

$$\frac{8pp}{3\,\text{ſin.}\,\psi^3} = \tfrac{1}{2}\Theta c\sqrt{2cp},$$

quae diuiſa per $\sqrt{p}$ fit

$$\frac{8p\sqrt{p}}{3\,\text{ſin.}\,\psi^3} = \tfrac{1}{2}\Theta c\sqrt{2c}, \text{ ſiue}$$

$$\frac{8p\sqrt{p}}{\text{ſin.}\,\psi^3} = \tfrac{3}{2}\Theta c\sqrt{2c},$$

vnde radicem cubicam extrahendo prodit

$$\frac{2\sqrt{p}}{\text{ſin.}\,\psi} = \sqrt[3]{\tfrac{3}{2}\Theta c\sqrt{2c}}.$$

Supra autem vidimus eſſe

$$p = \frac{fg}{f+g} \text{ et ſin.}\,\psi = \frac{2\sqrt{fg}}{f+g}, \text{ vnde fit } \frac{2\sqrt{p}}{\text{ſin.}\,\psi} = \sqrt{(f+g)},$$

ita vt deducti ſimus ad hanc aequationem:

$$\sqrt{(f+g)} = \sqrt[3]{\tfrac{3}{2}\Theta c\sqrt{2c}}$$

ſumtisque quadratis erit $f+g = c\sqrt[3]{\tfrac{9}{2}\Theta\Theta}$. Subſtituamus igitur loco f et g valores ſupra inuentos, et habebimus hanc aequationem:

$$\frac{a\,\text{ſin.}\,\alpha}{\text{ſin.}\,(\alpha+\Phi)} + \frac{a'\,\text{ſin.}\,\alpha'}{\text{ſin.}\,(\Phi+\theta-\alpha')} = c\sqrt[3]{\tfrac{9}{2}\Theta\Theta}$$

in qua cum vnica ſuperſit incognita, ſcilicet angulus Φ, totum negotium huc eſt perductum, vt ex hac aequatione valor anguli Φ eliciatur, quod quomodo commodiſſime praeſtari poſſit in ſequentibus oſtendemus.

§. 10. Quo reſolutionem huius aequationis facilius ſuſcipere queamus, eam ſub hac forma repraeſentemus:

$$\frac{A}{\text{ſin.}\,(\omega-\gamma)} + \frac{B}{\text{ſin.}\,(\omega+\gamma)} = C,$$

ita

ita vt ſit

$$A = a\,\text{ſin.}\,\alpha,\quad B = a'\,\text{ſin.}\,\alpha',\quad C = c\sqrt[3]{\tfrac{9}{2}\Theta\,\Theta};$$

tum vero

$$\omega - \gamma = \alpha + \Phi \text{ et } \omega + \gamma = \Phi + \theta - \alpha'$$

hincque

$$2\,\omega = \alpha + 2\,\Phi + \theta - \alpha' \text{ et } 2\,\gamma = \theta - \alpha - \alpha'$$

qui ergo poſterior angulus prorſus eſt cognitus, cum ſit $\gamma = \frac{\theta - \alpha - \alpha'}{2}$; at vero angulus incognitus erit $\omega = \frac{\alpha + 2\,\Phi + \theta - \alpha'}{2}$, ita vt ſi determinatus fuerit angulus ω, tum futurus ſit angulus quaeſitus $\Phi = \omega + \frac{\alpha' - \alpha - \theta}{2}$. Nunc igitur pro angulo ω inueniendo aequatio noſtra a fractionibus liberata erit

$$A\,\text{ſin.}(\omega + \gamma) + B\,\text{ſin.}(\omega - \gamma) = C\,\text{ſin.}(\omega + \gamma)\,\text{ſin.}(\omega - \gamma)$$

quae porro euoluta praebet

$$\left.\begin{array}{l} A\,\text{ſin.}\,\omega\,\text{coſ}\,\gamma + A\,\text{coſ.}\,\omega\,\text{ſin.}\,\gamma \\ + B\,\text{ſin.}\,\omega\,\text{coſ.}\,\gamma - B\,\text{coſ.}\,\omega\,\text{ſin.}\,\gamma \end{array}\right\} = C\,(\text{ſin.}\,\omega^2\,\text{coſ.}\,\gamma^2 - \text{coſ.}\,\omega^2\,\text{ſin.}\,\gamma^2)$$

ex qua angulum ω definiri oportet. Quem in finem ſi poneremus $\text{ſin.}\,\omega = s$, tum foret $\text{coſ.}\,\omega = \sqrt{(1 - s\,s)}$; atque hanc aequationem, vt ab irrationalitate liberetur, denuo quadrari oporteret. Hanc autem operationem ſequenti modo euitare poterimus.

§. 11. Scilicet quo haec aequatio ſtatim rationalis reddatur, ſtatuatur $\text{tang.}\,\frac{1}{2}\,\omega = x$, eritque $\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\,\omega = \frac{x}{\sqrt{(1 + x\,x)}}$ et $\text{coſ.}\,\frac{1}{2}\,\omega = \frac{1}{\sqrt{(1 + x\,x)}}$, vnde porro fit

$$\text{ſin.}\,\omega = \frac{2\,x}{1 + x\,x} \text{ et } \text{coſ.}\,\omega = \frac{1 - x\,x}{1 + x\,x},$$

quibus valoribus ſubſtitutis aequatio noſtra erit

$$\frac{2\,x\,\text{coſ.}\,\gamma}{1+xx}(A+B)+\frac{(1-xx)\,\text{ſin.}\,\gamma}{1+xx}(A-B)$$
$$=C\,\frac{(4\,xx\,\text{coſ.}\,\gamma^2-(1-xx)^2\,\text{ſin.}\,\gamma^2)}{(1+xx)^2}.$$

Ponatur igitur porro breuitatis gratia $(A+B)\,\text{coſ.}\,\gamma = F$ et $(A-B)\,\text{ſin.}\,\gamma = G$ et multiplicando per $(1+xx)^2$ aequatio noſtra reſoluenda erit

$$2\,F\,x\,(1+xx)+G\,(1-x^4)$$
$$=C\,(4\,xx\,\text{coſ.}\,\gamma^2-(1-xx)^2\,\text{ſin.}\,\gamma^2),$$

quae euoluta reducitur ad hanc aequationem quarti gradus:

$$(G-C\,\text{ſin.}\,\gamma^2)\,x^4-2\,F\,x^3+2\,C\,x\,x\,(1+\text{coſ.}\,\gamma^2)$$
$$-2\,F\,x-C\,\text{ſin.}\,\gamma^2-G=0,$$

ex qua, ſi forte duas vel omnes adeo radices habeat reales, totidem orientur ſolutiones noſtri problematis, quarum quae reuera locum habeat facile definietur, ſi inſuper tertia quaepiam obſeruatio in ſubſidium vocetur, vnde ſimul inclinatio orbitae ad eclipticam innoteſcet.

§. 12. Ex qualibet autem radice huius aequationis inuenta x ſtatim colligitur angulus ω, cum ſit $\text{tang.}\,\omega = x$, tum vero ex cognito angulo ω deriuabitur angulus

$$\Phi=\omega+\frac{\alpha'-\alpha-\theta}{2}$$

ex quo cognoſcetur vera poſitio lineae nodorum, cum ſit angulus ☊ $S\,T = \Phi$. Deinde vero ex cognito angulo Φ vtraque diſtantia Cometae a Sole definietur, cum ſit

$$S\,Z=f=\frac{a\,\text{ſin.}\,\alpha}{\text{ſin.}\,(\alpha+\ddagger)}\ \text{et}\ S\,Z'=g=\frac{a'\,\text{ſin.}\,\alpha'}{\text{ſin.}\,(\ddagger+\theta-\alpha')},$$

ſiue $f=\frac{A}{\text{ſin.}\,(\omega-\gamma)}$ et $g=\frac{B}{\text{ſin.}\,(\omega+\gamma)}$, exiſtente $\gamma=\frac{\theta-\alpha-\alpha'}{2}$, quibus inuentis habebitur diſtantia perihelii a ſole

$$S\,\Pi=p=\frac{fg}{f+g},$$

atque ſimul cognoſcetur angulus $\Pi\,S\,Z=\psi$, cum ſit

tang.

tang. $\frac{1}{2}\psi = \sqrt{\frac{f}{g}}$. Sic igitur tota Cometae orbita perfecte erit determinata, et nihil aliud reſtat, niſi vt eius inclinatio ad eclipticam aſſignetur, id quod ex qualibet alia obſeruatione, ubi Cometae latitudo fuerit obſeruata, facile praeſtabitur.

13. Quin etiam ex iis, quae iam ſunt allata, tempus, quo Cometa per perihelium Π tranſierit, haud difficulter aſſignari poterit. Si enim tempus, quo cometa ex loco Z in perihelium peruenerit, ponatur $= \mathrm{T}$, quoniam ſupra inuenimus aream $\Pi S Z = \Sigma = pp(t + \frac{1}{3}t^3)$, exiſtente $t = \text{tang.} \frac{1}{2}\psi = \sqrt{\frac{f}{g}}$, erit per relationem inter aream et tempus $\Sigma = \frac{1}{2}\mathrm{T}c\sqrt{2cp}$, vnde tempus iſtud quaeſitum erit

$$\mathrm{T} = \frac{2\Sigma}{c\sqrt{2cp}} = \frac{2p\sqrt{p}(t + \frac{1}{3}t^3)}{c\sqrt{2c}}.$$

Cum igitur ſit $p = \frac{fg}{f+g}$ et $t = \sqrt{\frac{f}{g}}$, his valoribus ſubſtitutis reperietur tempus quaeſitum

$$\mathrm{T} = \frac{2ff(g + \frac{1}{3}f)}{(f+g)^{\frac{3}{2}}c\sqrt{2c}}$$

ſiue cum ſit $f + g = c\sqrt[3]{\frac{9}{2}\Theta\Theta}$, ideoque

$$(f+g)^{\frac{3}{2}} = c\sqrt{c}.\frac{3\Theta}{\sqrt{2}}, \text{ erit } \mathrm{T} = \frac{2ff(g + \frac{1}{3}f)}{3c^3\Theta},$$

ſicque tempus tranſitus per perihelium erit cognitum, ſi modo per x iuſta radix aequationis illius quarti gradus fuerit aſſumta, id quod aliae obſeruationes in ſubſidium vocatae mox decident.

§. 14. Maxime notatu digna eſt aequatio, ad quam ſumus perducti, quae erat $f + g = c\sqrt[3]{\tfrac{2}{9}\Theta\Theta}$, propter quod $f + g$ exprimit diſtantiam punctorum Z et Z', quae eſt duorum locorum Cometae in ſua orbita, quae ex Sole viſa ſibi ſunt oppoſita, quare cum quaelibet recta per Solem ducta vicem lineae nodorum gerere poſſit, ſolo tempore, quo Cometa ex vno termino huius rectae alterum defertur, quantitas huius rectae, ſiue diſtantia inter bina illa loca ſibi oppoſita abſolute aſſignari poteſt, quod operae pretium erit ſequenti theoremate complecti.

Theorema generale.

pro motu Cometarum in orbitis parabolicis.

Tab. X. Fig. 3. §. 25. Si Cometa in orbita parabolica quacunque F Π G circa Solem, in eius foco S poſitum, circumferatur, atque innoteſcat tempus, quo Cometa ex loco quocunque F in eius oppoſitum G fuerit delatus, ex eo quantitas huius rectae F G abſolute aſſignari poteſt. Ex tabulis enim ſolaribus excerpatur motus medius Solis illi tempori reſpondens, qui cum detur in ſignis, gradibus et minutis, ponatur = N gradibus; tum fiat vt $360^\circ : N =$ tota peripheria circuli 2π ad Θ, ita vt ſit $\Theta = \frac{2\pi N^\circ}{360^\circ}$. Tum autem ſi diſtantia media Solis a Terra ponatur $= c$, diſtantia illorum duorum locorum F et G, ſiue recta F G ſemper aequabitur huic formulae: $c\sqrt[3]{\tfrac{2}{9}\Theta\Theta}$. Ex quo intelligitur, cubum huius rectae F G ſemper proportionalem eſſe quadrato temporis, quo Cometa ex F in G pervenerit.

§. 16. Cum autem aequatio vltima quarti gradus, ad quam pertigimus, plures habere queat radices x, videamus quomodo ex iis eam, quae reuera locum habet, dignoſcere valeamus. Hunc in finem in ſubſidium vocemus tertiam quandam obſeruationem, qua tam longitudo quam latitudo cometae fuerit determinata, atque pro hoc tempore ex orbita iam cognita quaeratur locus cometae in ſua orbita, qui ſit V, ita vt pro hoc tempore innoteſcat tam diſtantia Cometae a Sole S V, quam angulus ſeu argumentum latitudinis ☊ S V. Ponatur igitur diſtantia S V $= v$ et angulus ille ☊ S V $= \eta$. Tab. X. Fig. 2.

§. 17. Nunc igitur in plano eclipticae iterum ſit recta S ☊ linea nodorum cometae, ac pro tempore tertiae obſeruationis verſetur Terra in t, ſitque diſtantia S $t = b$. Sit iam verus cometae locus in z, vnde ad planum eclipticae demittatur perpendiculum $z\,x$ ductisque rectis $t\,x\,u$ et $t\,z$, quia tam longitudinem quam latitudinem cometae obſeruatam eſſe aſſumimus, hinc innoteſcent anguli S $t\,u$ et $t\,u\,z$. Ac ſi ducta intelligatur recta S z, etiam cognitus erit angulus ☊ S $z = \eta$, cum ipſa diſtantiae S $z = v$. Vnde ſi ex puncto x ad lineam nodorum ducatur normalis $x\,p$, iungaturque recta $p\,z$, erit $p\,z = v$ ſin. η et S $p = v$ coſ. η, hincque innoteſcet ipſum punctum x, ideoque et recta $t\,x$ hincque porro perpendiculum $z\,x$, ex quo definietur inclinatio orbitae cometae, ſiue angulus $x\,p\,z$. Simul vero patet, ſi calculus hoc modo inſtituatur, non ſolum inueniri poſſe inclinationem orbitae ad eclipticam, ſed etiam facile iudicari poſſe, vtrum determinationes ex theoria deductae, ſcilicet diſtantia v cum angulo η, congruant cum quantitatibus per obſeruationem datis nec ne. Fig. 4.

 §. 18.

§. 18. Quod quo clarius appareat, ad ſequentia momenta attendatur. 1) Ex triangulo S *t u*, in quo dantur omnes anguli cum latere S *t*, dabuntur latera S *u* et *t u*. 2) Ex diſtantia S *z* cum angulo ☊ S *z* dabuntur rectae S *p* et *p z*, poſtquam ſcilicet ex loco cometae *z* ad lineam nodorum ducta eſt perpendicularis *z p*. 3) Hinc igitur conſtabit interuallum *u p*, ideoque, ducta in plano eclipticae ex puncto *p* normali ad lineam nodorum *p x* rectae *t u* occurrente in puncto *x*, ex interuallo *u p* et angulo *t u p* definietur tam interuallum *p x* quam *u x*, quo oblato a recta *t u* remanebit interuallum *t x*. 4) Porro ex obſeruata latitudine ſeu angulo *x t z* concluditur eleuatio cometae ſupra eclipticam, ſcilicet recta *x z*, ita vt iam determinata ſint tria latera trianguli rectanguli *z p x*; quamobrem ſi deprehendatur fore reuera $zp^2 = px^2 + xz^2$, id ſignum erit iuſtam radicem aequationis illius quarti gradus eſſe aſſumtam; ſin autem haec aequalitas non locum inueniat, alia radix illius aequationis conſiderari calculusque ſimili modo inſtitui debebit. Poſtquam autem vera radix fuerit inuenta, ita vt ſit $pz^2 = px^2 + xz^2$, tum angulus *z p x* dabit inclinationem orbitae cometae ad eclipticam. Hoc igitur modo iis caſibus, quibus cuiuspiam cometae ambos tranſitus per eclipticam obſeruare licuit, eius vera orbita parabolica abſolute ſine tentamine vel approximatione determinari poterit.

DE

DE VARIIS MOTVVM GENERIBVS, QVI IN SATELLITIBVS PLANETARVM LOCVM HABERE POSSVNT.

Auctore
L. EVLERO

§. 1.

Quamquam nunc quidem tabulae lunares non vltra vnum minutum primum a veritate aberrare perhibentur, tamen, quantum adhuc in ipſa theoria ſit deſiderandum, exinde intelligi poteſt, quod, ſi orbitae lunaris excentricitas multo maior exiſteret, vel etiam ſub maiore angulo ad eclipticam inclinaretur, cognitio motus Lunae etiamnunc fere penitus lateret, ita vt in computo eclipſium fortaſſe adhuc pluribus horis eſſemus aberraturi. Cum enim in praeſenti ſtatu determinatio loci Lunae circiter 30 correctiones exigat, pro maiori excentricitate et inclinatione forſitan centum correctiones vel adeo ne mille quidem ſufficerent. Ob tantum autem correctionum numerum, etiamſi ſingulae eſſent exactae, enormes errores plane euitari non poſſent.

§. 2.

§. 2. Multo maior vi incertitudo eſſet metuenda, ſi luna ad multo maiorem diſtantiam a terra fuiſſet remota, quippe quo caſu omnes correctiones nunc quidem adhiberi ſolitae nullum amplius locum inuenire poſſent, propterea quod hoc caſu mox incertum eſſet futurum, verum talem Lunam ad ordinem ſatellitum potius referri conueniat, quam ad planetas primarios, ſicque hoc caſu omnia ſubſidia, quibus Aſtronomi hactenus vſi ſunt, omni vſu eſſent caritura, et nos adhuc in craſſiſſima ignoratione talis motus verſaremur. Ex quo abunde intelligere licet, nouam theoriam motuum coeleſtium adhuc maximo defectu laborare, et, niſi inſignia incrementa in Analyſi detegantur, meliorem ſucceſſum nullo modo ſperari poſſe.

§. 3 His igitur ſummis difficultatibus perpenſis nulla alia via patere videtur, hanc ſcientiam ad maiorem perfectionis gradum euehendi, niſi vt plures huiusmodi motus omni ſtudio perpendantur, atque tales caſus fingantur, qui continuo propius ad eiusmodi motus nobis adhuc penitus abſconditos accedant. Hunc in finem vtique a caſibus ſimplicioribus inchoari conueniet, dum ſcilicet omnes circumſtantiae, quibus difficultates multiplicantur, quantum fieri poteſt, remoueantur. Quemadmodum enim in Geometria, ante quam problemata difficillima ſoluenda ſuſcipiuntur, plura alia ſimpliciora praemitti ſolent, quae continuo propius ad illa perducant, ita etiam in Aſtronomia ſimili methodo verſari conueniet.

§. 4. Vt igitur in omnes motus, qui in Lunam cadere poſſunt, feliciori ſucceſſu inquiramus, primo Lunam

nam in ipſo plano eclipticae circumferri aſſumemus, deinde quoque ipſam terram motu vniformi circa Solem in circulo reuolui ſtatuemus. Praeterea vero, ne actio Lunae terram afficere queat, maſſam Lunae tanquam minimam ſpectabimus, vnde haec quaeſtio nobis euoluenda proponatur:

Problema.

Si, dum terra motu aequabili in circulo circa Solem promouetur, corpori cuipiam, quaſi Lunae, extra terram in ipſo plano eclipticae poſito, motus quicunque imprimatur, inueſtigere motum, quo hoc corpus, ex centro terrae ſpectatum, progredi videbitur.

§. 5. Quoniam motus, qualis ex centro terrae ſpectabitur, deſideratur, ipſam terram tanquam quieſcentem et fixam in T ſpectabimus, vnde in ipſo plano eclipticae rectam pariter fixam T A ducamus, a qua ad quoduis tempus elongationem noſtri corporis, ſeu Lunae, aſſignari oporteat. Elapſo igitur quocunque tempore reperiatur Sol in S, Luna vero in L, et quia nunc Sol circa terram vniformiter in circulo promoueri videbitur, eius diſtantiam a terra T S vnitate deſignabimus. Praeterea vero, quia motus Solis eſt vniformis, ipſe angulus A T S, quem vocemus $= \theta$, commodiſſimam menſuram temporis nobis ſuppeditabit. Pro Luna autem ponamus eius diſtantiam a terra $TL = v$, eiusque longitudinem, a directione T A computatam, ſeu angulum $ATL = \Phi$. Tum vero ſtatuamus breuitatis gratia angulum $STL = \Phi - \theta = \eta$, eritque recta $SL = \sqrt{(1 - 2v \operatorname{coſ.} \eta + vv)}$, quam breuitatis gratia deſignemus per u. Praeterea ex punctis L Tab. X Fig. 5.

et S ad rectam T A demittantur perpendicula L X et S P, et pro puncto L vocatis coordinatis $TX = x$ et $XL = y$, erit $x = v \operatorname{coſ.} \Phi$ et $y = v \operatorname{ſing.} \Phi$, pro Sole autem erit $TP = \operatorname{coſ.} \theta$ et $SP = \operatorname{ſin.} \theta$.

§. 6. Nunc vt principia motus huc applicemus, primo ipſe angulus $ATS = \theta$ nobis exprimat menſuram temporis, ita vt elementum temporis ſit $d\theta$; deinde ipſam Solis maſſam pariter vnitate deſignemus, cuius reſpectu ſit maſſa terrae $= m$, cuius valor ex vera parallaxi Solis deducitur $m = \frac{1}{\text{[illegible]}}$, Lunae autem maſſam, vt iam notauimus, nullam ſtatuamus. His poſitis Luna primo ſollicitabitur ad terram vi $= \frac{m}{vv}$, in directione L T; ſecundo autem ad Solem trahitur vi $= \frac{1}{uu}$, in directione L S. Tertio vero, quia terram in quiete ſpectamus, vires, quibus terra ſollicitatur, contrarie Lunae applicari oportet, vnde cum Sol terram attrahat vi $= 1$, in directione T S, eadem vis $= 1$ Lunae applicata eſt intelligenda ſecundum directionem S T.

§. 7. Nunc ſingulas has vires ſecundum binas directiones coordinatarum x et y reſolui oportet, vnde prima vis $= \frac{m}{vv}$ ſecundum L T per reſolutionem dabit pro directione X T vim $= \frac{mx}{v^3} = \frac{m \operatorname{coſ.} \Phi}{vv}$ et pro directione L X vim $= \frac{my}{v^3} = \frac{m \operatorname{ſin.} \Phi}{vv}$. Secundo vis ſecundum L S, quae eſt $\frac{1}{uu}$, dabit pro directione T X vim $= \frac{\operatorname{coſ.} \theta - x}{u^3} = \frac{\operatorname{coſ.} \theta - v \operatorname{coſ.} \Phi}{u^3}$ et pro directione X L vim $= \frac{\operatorname{ſin.} \theta - y}{u^3} = \frac{\operatorname{ſin.} \theta - v \operatorname{ſin.} \Phi}{u^3}$. Denique tertia vis $= 1$, in directione S T agens, praebet pro directione X T vim $= \operatorname{coſ.} \theta$ et pro directione L X vim $= \operatorname{ſin.} \theta$; vnde colligendo tota vis in directione X T vrgens erit

m

$$\frac{m\,\mathrm{cof.}\,\Phi}{v\,v} - \frac{\mathrm{cof.}\,\theta + v\,\mathrm{cof.}\,\Phi}{v^3} + \mathrm{cof.}\,\theta;$$

tota autem vis in directione L X vrgens erit

$$= \frac{m\,\mathrm{ſin.}\,\Phi}{v\,v} - \frac{\mathrm{ſin.}\,\theta + v\,\mathrm{ſin.}\,\Phi}{u^3} + \mathrm{ſin.}\,\theta.$$

§. 8. Iam per principia motus his viribus proportionales eſſe debent accelerationes corporis L ſecundum easdem directiones, quae cum ſint $\frac{d\,d\,x}{d\,\theta^2}$ et $\frac{d\,d\,y}{d\,\theta^2}$, ſumto temporis elemento $d\,\theta$ conſtante, conſtituta maſſarum et temporis ratione vt fecimus, iſtae accelerationes per $1 + m$ multiplicari debent, vt viribus illis euadant aequales, quae cum coordinatas x et y diminuere tendant, binae aequationes motum corporis L determinantes erunt

$$1^\circ.\ (1 + m)\frac{d\,d\,x}{d\,\theta^2} = -\frac{m\,\mathrm{cof.}\,\Phi}{v\,v} + \frac{\mathrm{cof.}\,\theta - v\,\mathrm{cof.}\,\Phi}{u^3} - \mathrm{cof.}\,\theta \text{ et}$$

$$2^\circ.\ (1 + m)\frac{d\,d\,y}{d\,\theta^2} = -\frac{m\,\mathrm{ſin.}\,\Phi}{v\,v} + \frac{\mathrm{ſin.}\,\theta - v\,\mathrm{ſin.}\,\Phi}{u^3} - \mathrm{ſin.}\,\theta.$$

Vbi loco $1 + m$ tuto ſcribere licet 1, non ſolum quia maſſa m tam eſt parua, ſcilicet $\frac{3}{1000000}$, ſed etiam quia nobis maſſas corporum coeleſtium tam accurate noſſe non conceditur.

§. 9. Quo has aequationes propius ad vſum noſtrum accommodemus, notaſſe iuuabit eſſe

$$x\,\mathrm{cof.}\,\Phi + y\,\mathrm{ſin.}\,\Phi = v \text{ et } y\,\mathrm{cof.}\,\Phi - x\,\mathrm{ſin.}\,\Phi = 0.$$

Hinc differentiando habebimus

$$d\,x\,\mathrm{cof.}\,\Phi + d\,y\,\mathrm{ſin.}\,\Phi = d\,v \text{ et } d\,y\,\mathrm{cof.}\,\Phi - d\,x\,\mathrm{ſin.}\,\Phi = v\,d\,\Phi;$$

porro igitur differentiando reperietur

$$d\,d\,x\,\mathrm{cof.}\,\Phi + d\,d\,y\,\mathrm{ſin.}\,\Phi = d\,d\,v - v\,d\,\Phi^2 \text{ et}$$

$$d\,d\,y\,\mathrm{cof.}\,\Phi - d\,d\,x\,\mathrm{ſin.}\,\Phi = 2\,d\,v\,d\,\Phi + v\,d\,d\,\Phi.$$

Quodſi nunc loco $d\,d\,x$ et $d\,d\,y$ valores ſupra dati ſubſti-

ſtuantur, prodibunt ſequentes nouae aequationes:

$$1^\circ.\ \frac{(1+m)(ddv - vd\Phi^2)}{d\theta^2} = -\frac{m}{vv} + \frac{\text{coſ.}\,\eta}{u^3} - \frac{v}{u^3} - \text{coſ}\,\eta;$$

$$2^\circ.\ \frac{(1+m)(2dvd\Phi + vdd\Phi)}{d\theta^2} = -\frac{\text{ſin.}\,\eta}{u^3} + \text{ſin.}\,\eta.$$

Hoc ſcilicet modo non ſolum coordinatas x et y, ſed etiam angulorum Φ et θ tam ſinus quam coſinus ex calculo expulimus; interim tamen hi ambo anguli in angulo η continentur, ſiquidem eſt $\eta = \Phi - \theta$.

§. 10. Quoniam in his duabus formulis innumerae diuerſae motuum ſpecies continentur, videamus ante omnia, vtrum inter eas eiusmodi detur ſpecies, qua Luna circa Terram vniformiter in circulo reuolui queat, nec ne? Hunc in finem ponamus diſtantiam Lunae a terra, quae debet eſſe conſtans, $v = a$, et cum eius celeritas angularis ſit $= \frac{d\Phi}{d\theta}$, faciamus $\frac{d\Phi}{d\theta} = n$, ita vt ſit $d\Phi = n\,d\theta$ et $dd\Phi = 0$. His autem valoribus introductis ambae noſtrae aequationes euadent:

$$1^\circ.\ -ann(1+m) = -\frac{m}{aa} + \frac{\text{coſ.}\,\eta}{u^3} - \frac{a}{u^3} - \text{coſ.}\,\eta \text{ et}$$

$$2^\circ.\ 0 = -\frac{\text{ſin.}\,\eta}{u^3} + \text{ſin.}\,\eta, \text{ vbi erit}$$

$$u = \sqrt{(1 - 2a\,\text{coſ.}\,\eta + aa)}.$$

§. 11. Ex ſecunda aequatione ſtatim patet, eam ſubſiſtere non poſſe, niſi ſit vel ſin. $\eta = 0$, vel $u = 1$. At vero poſterius fieri nequit, niſi angulus η ſit conſtans, propterea quod eſſe deberet coſ $\eta = \frac{1}{2}a$. Quia vero eſt $d\Phi = n\,d\theta$, ideoque $\Phi = n\theta$, erit $\eta = (n-1)\theta$, qui angulus conſtans eſſe nequit, niſi $n = 1$. Hic autem caſus iam in priore continetur, quo eſſe debet ſin. $\eta = 0$, id quod duplici modo fieri poteſt, vel ſumendo $\eta = 0$, vel $\eta = 180^\circ$. Quare cum ſit $\eta = (n-1)\theta$, priore caſu debet eſſe

eſſe $n = 1$. Pro altero vero caſu, quo $\eta = 180^\circ$, ex valore differentiali $d\Phi = n\,d\theta$ fit

$$\Phi = n\theta + \alpha, \text{ ideoque } \eta = (n-1)\theta + \alpha = 180^\circ,$$

quod fieri nequit, niſi ſit $n = 1$ et $\alpha = 180^\circ$, ſicque duos habebimus caſus euoluendos, alterum quo $\eta = 0$, alterum vero quo $\eta = 180^\circ$. Vtrumque ergo ſeorſim euoluamus.

§. 12. Sit igitur primo $\eta = 0$, ideoque ſin. $\eta = 0$ et coſ. $\eta = 1$, vnde fiet $u = 1 - a$. Quare cum poſteriori aequationi iam eſt ſatisfactum, ſumendo $n = 1$ prior aequatio hanc praebet conditionem:

$$-a(1+m) = -\frac{m}{aa} + \frac{1}{(1-a)^2} - 1$$

quae vnicam tantum continet incognitam a, cuius ergo valorem hinc determinari oportet. Reducitur autem iſta aequatio ad hanc formam:

$$0 = a^3(1-a)^2(1+m) - m(1-a)^2 + a^3(2-a)$$

quae aequatio ad quinque dimenſiones exſurgit. Quia autem m eſt fractio quam minima, haec aequatio ſubſiſtere nequit, niſi ipſa quantitas a ſit quam minima; tum autem loco $(1-a)^2$ ſcribere licebit 1, quo facto habebimus

$$a^3(1+m) - m + 2a^3 = 0,$$

vnde colligitur

$$a^3 = \frac{m}{3+m}, \text{ ideoque } a = \sqrt[3]{\frac{m}{3+m}} = \sqrt[3]{\frac{m}{3}}.$$

§. 13. Sin autem ſit $\eta = 180^\circ$ et coſ. $\eta = -1$, ob $n = 1$ et $u = 1 + a$ prior aequatio dabit

$$0 = +a(1+m) - \frac{m}{aa} - \frac{1}{(1+a)^2} + 1;$$

vbi etiam facile patet a eſſe debere minimum, atque adeo,

facta euolutione et neglectis terminis minimis, prorſus vt ante prodibit $a^3 = \frac{m}{3+m}$. Hi autem valores proxime tantum ſunt veri, et aliquod diſcrimen prodiret, ſi approximationem vlterius proſequi vellemus, quod autem operae pretium non videtur, cum ſufficiat iſtum valorem ipſius a proxime noſſe.

Euolutio caſus,

quo Luna motu vniformi in circulo circa terram reuolui poſſit.

§. 14. Iam oſtendimus, hoc fieri non poſſe, niſi angulus $STL = \eta = \Phi - \theta$ fuerit vel nullus vel 180 graduum. Priore igitur caſu Luna perpetuo Soli maneret coniuncta, ſeu in perpetua coniunctione cum Sole cerneretur; poſteriori vero caſu perpetuo in oppoſitione Solis verſaretur, ideoque pleno lumine luceret. Vtroque ergo caſu talis Luna reuolutiones ſuas ſingulis annis abſolueret, et tempus menſtruum exacte cum duratione anni conueniret.

§. 15. Deinde etiam vidimus, diſtantiam talis Lunae a terra eſſe $a = \sqrt[3]{\frac{m}{3}}$. Cum igitur ſit $m = \frac{3}{[illegible]}$, erit $a = \frac{1}{[illegible]}$, ſiue haec diſtantia aequabitur centeſimae parti diſtantiae Solis a Terra. Quare cum diſtantia media verae Lunae a Terra ſit quaſi $\frac{1}{[illegible]}$ diſtantiae Solis, talis Luna quadruplo longius a terra diſtaret quam vera Luna, ideoque in ſemidiametris terrae eius diſtantia foret circiter 240 ſemidiametrorum terreſtrium. Vnde patet, quantopere tempus periodicum talis Lunae a regula *Kepleri* eſſet diſcrepaturum, quoniam ſecundum hanc regulam tempus perio-

riodicum talis Lunae ſe habere deberet ad tempus menſtruum vt 8 : 1, vel talis Luna octo menſibus ſuos circuitus abſoluere deberet, cum tamen integrum annum poſtulet, ratio autem manifeſto ſita eſt in eo, quod vis centripeta terrae in maioribus diſtantiis continuo magis a vi Solis diminuitur.

§. 16. Quoniam porro talis Luna etiam a Sole perpetuo eandem diſtantiam ſeruaret, dum ſcilicet priori caſu, quo $\eta = 0$, eius diſtantia a Sole perpetuo foret $= 1 - a$, poſteriori vero caſu, quo $\eta = 180°$, ea foret $= 1 + a$, talis Luna ex Sole ſpectata etiam circulum deſcribere cerneretur, idque motu vniformi, quandoquidem perpetuo terrae coniuncta maneret, eodemque tempore ſuas reuolutiones perageret; perpetuo enim vel in coniunctione inferiore, vel in ſuperiore verſaretur.

§. 17. Maxime notatu dignus eſt iſte caſus, quo exiſtere poſſet corpus coeleſte, quod tam circa terram, quam circa Solem circulum deſcribere cerneretur, quatenus enim circa terram in circulo reuoluitur, eatenus rite tanquam ſatelles terrae ſpectari poteſt, quatenus autem circa Solem in circulo reuoluitur, eatenus pro planeta primario haberi poteſt. Quare cum diſtantia a terra ſit $a = \frac{1}{103}$, ad hanc vsque diſtantiam ſphaera lunaris extendenda merito videtur, ita vt omnia corpora, quae intra hoc ſpatium circa terram voluuntur, ad claſſem ſatellitum merito referri queant; quae autem extra hoc ſpatium curſum ſuum abſoluunt, ea ad claſſem planetarum principalium numerari debeant.

§. 18.

§. 18. Quemadmodum autem terrae ſuam ſphaeram lunarem aſſignauimus, ita etiam reliquis planetis ſuae ſphaerae ſatellitiae conſtitui poterunt. Formulae enim ſupra datae ad planetam Iouem transferentur, ſi diſtantia media Iouis a Sole vnitate deſignetur, littera vero m maſſam Iouis denotet, quae cum ſit circiter $\frac{1}{1125}$, radius ſphaerae ſatellitiae Iouis reperietur $a = \sqrt[3]{\frac{1}{3.1125}} = \frac{1}{15}$. Ex quo ſequitur, quaecunque corpora circa Iouem intra hanc diſtantiam reuoluuntur, ea inter eius ſatellites eſſe numeranda, dum contra omnia, quae extra motus ſuos peragunt, in ordinem planetarum principalium redigi debeant. Simili modo ſphaera ſatellitia Saturni ad diſtantiam $\frac{1}{21}$ ſuae diſtantiae a Sole extendenda reperietur.

Propior applicatio ſuperiorum formularum ad motus lunares.

§. 19. Quoniam igitur ad genus lunare alia corpora referri non conuenit, niſi quorum diſtantia a terra non excedit partem centeſimam diſtantiae Solis a Terra, in formulis noſtris diſtantia T L $= v$ ſemper minor ſpectari poterit quam $\frac{1}{100}$, vnde cum iſta diſtantia ſit valde exigua, valorem litterae $u = \sqrt{(1 - 2 v \operatorname{coſ.} \eta + v v)}$ ſatis commode vero proxime exprimere licebit; erit enim

$$\frac{1}{u^3} = (1 - 2 v \operatorname{coſ.} \eta + v v)^{-\frac{3}{2}};$$

vnde ſi altiores ipſius v poteſtates negligere velimus, erit $\frac{1}{u^3} = 1 + 3 v \operatorname{coſ.} \eta$; ſin autem etiam poteſtatem ſecundam $v v$ admittere vellemus, foret

$$\frac{1}{u^3} = 1 + 3 v \operatorname{coſ.} \eta - \frac{3}{2} v v + \frac{15}{2} v v \operatorname{coſ.} \eta^2.$$

Verum quia v ſemper minus eſt quam $\frac{1}{100}$, hos poſtremos ter-

terminos facile negligere licebit, ita vt ſufficiat ſumſiſſe $\frac{1}{u^3} = 1 + 3\, v$ coſ. η.

§. 20. Hoc autem valore introducto binae aequationes motum determinantes ſupra §. 9. inuentae erunt:

1°. $\frac{d\,d\,v - v\,d\,\Phi^2}{d\,\theta^2} = -\frac{m}{v\,v} - v\,(1 - 3$ coſ. $\eta^2)$ et

2°. $\frac{2\,d\,v\,d\,\Phi + x\,d\,d\,\Phi}{d\,\theta^2} = -3\,v$ coſ. η ſin. η.

Cum igitur ſit

coſ. $\eta^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ coſ. $2\,\eta$ et coſ. η ſin. $\eta = \frac{1}{2}$ ſin. $2\,\eta$,

hac aequationes induent ſequentes formas:

1°. $\frac{d\,d\,v - v\,d\,\Phi^2}{d\,\theta^2} = -\frac{m}{v\,v} + \frac{1}{2}\,v\,(1 + 3$ coſ. $2\,\eta)$ et

2°. $\frac{2\,d\,v\,d\,\Phi + v\,d\,d\,\Phi}{d\,\theta^2} = -\frac{3}{2}\,v$ ſin. $2\,\eta$.

Hinc iam multo facilius caſus deriuari poteſt, quo corpus circulum motu vniformi deſcribit. Poſito enim $v = a$ et $d\,\Phi = n\,d\,\theta$, hae aequationes dabunt

1°. $-a\,n\,n = -\frac{m}{a\,a} + \frac{1}{2}\,a\,(1 + 3$ coſ. $2\,\eta)$ et

2°. $0 = -\frac{3}{2}\,a$ ſin. $2\,\eta$,

vbi vt ante eſſe debet vel $\eta = 0$, vel $\eta = 180°$, tum vero $n = 1$. Pro priore caſu autem vtrinque erit coſ. $2\,\eta = 1$, vnde iſta aequatio fiet $3\,a^3 = m$, ideoque $a = \sqrt[3]{\frac{m}{3}}$, vt ante.

§. 21. Caeterum hinc videri poſſet, etiam ſumi poſſe $\eta = 90°$. Quoniam enim hoc modo poſteriori aequationi ſatisfit, tum autem ob $d\,\Phi = n\,d\,\theta$ eſt angulus $\Phi = n\,\theta + \alpha$, ideoque $\eta = (n-1)\,\theta + \alpha = 90°$, foret vtique $\alpha = 90°$ et $n = 1$. At vero pro priore aequatione habebitur coſ. $2\,\eta = -1$, vnde prodiret $0 = \frac{-m}{a\,a}$,

 qui

qui ergo caſus manifeſto locum habere nequit. Quemadmodum autem hinc caſum elicuimus, quo motus corporis ſit circularis, etiam operae pretium erit in eos caſus inquirere, vbi motus tantum quam minime, ſeu infinite parum a circulari diſcrepat.

Inueſtigatio caſuum, quibus motus Lunae infinite parum a circulari eſſet diſcrepaturus.

§. 22. Quia motus proxime in circulo abſolui debet, diſtantia v ſemper quam minime a conſtante diſcrepare debet. Ponatur igitur $v = a(1 + \alpha \operatorname{coſ.} 2\eta)$, vbi α fractionem prae vnitate quam minimam denotet, ita vt eius poteſtates tuto negligi queant. Ex ipſa enim aequationum forma facile intelligitur, partem iſtam minimam inuoluere debere coſinum anguli 2η. Deinde quia etiam motus proxime debet eſſe vniformis, ſtatuatur ſimili modo $\frac{d\Phi}{d\theta} = n(1 + \beta \operatorname{coſ.} 2\eta)$, ita vt etiam β ſit fractio quam minima. Hinc cum ſit $d\eta = d\Phi - d\theta$, erit

$$\frac{d\eta}{d\theta} = n(1 + \beta \operatorname{coſ.} 2\eta) - 1, \text{ ſiue } \frac{d\eta}{d\theta} = n - 1,$$

ob β fractionem minimam. His poſitis erit

$$\frac{dv}{d\theta} = -2a\alpha(n-1) \operatorname{ſin.} 2\eta \text{ et}$$

$$\frac{ddv}{d\theta^2} = -4a\alpha(n-1)^2 \operatorname{coſ.} 2\eta,$$

tum vero habebitur

$$\frac{dd\Phi}{d\theta^2} = -2n\beta(n-1) \operatorname{ſin.} 2\eta.$$

§. 23. His iam valoribus introductis pro aequatione poſteriore habebimus

$v\,dd\Phi$

$\frac{v\,d\,d\,\Phi}{d\,\theta^2} = -\,2\,a\,n\,\beta\,(n-1)$ ſin. $2\,\eta$ et

$\frac{2\,d\,v\,d\,\Phi}{d\,\theta^2} = -\,4\,n\,a\,\alpha\,(n-1)$ ſin. $2\,\eta$.

His porro valoribus introductis aequatio poſterior erit

$$-\,2\,a\,n\,\beta\,(n-1)\,\text{ſin. }2\eta - 4\,a\,n\,\alpha\,(n-1)\,\text{ſin. }2\eta = -\tfrac{3}{2}\,a\,\text{ſin. }2\eta,$$

neglecta in parte dextra particula infinite parua. Hinc per a ſin. $2\,\eta$ diuidendo habebimus

$$4\,n\,(n-1)\,(\beta + 2\,\alpha) = 3, \text{ ideoque}$$

$$\beta + 2\,\alpha = \frac{3}{4\,n\,(n-1)},$$

Vnde iam patet, quia α et β debent eſſe fractiones quam minimae, hunc caſum locum habere non poſſe, niſi fuerit numerus n ſatis notabilis, hoc eſt niſi Luna admodum celeriter circa terram reuoluatur.

§. 24. Expediamus nunc etiam priorem aequationem, pro qua erit primo

$$\frac{d\,d\,v}{d\,\theta^2} = -\,4\,a\,\alpha\,(n-1)^2\,\text{coſ. }2\,\eta,$$

deinde vero erit

$$\frac{v\,d\,\Phi}{d\,\theta^2} = a\,n\,n\,(1 + (\alpha + 2\,\beta)\,\text{coſ. }2\,\eta).$$

Porro pro parte dextra habebitur

$$\frac{m}{v\,v} = \frac{m}{a\,a}\,(1 + \alpha\,\text{coſ. }2\,\eta)^{-2} = \frac{m}{a\,a}\,(1 - 2\,\alpha\,\text{coſ. }2\,\eta),$$

ac denique

$$\tfrac{1}{2}\,v\,(1 + 3\,\text{coſ. }2\,\eta) = \tfrac{1}{2}\,a\,(1 + (\alpha + 3)\,\text{coſ. }2\,\eta)$$
$$= \tfrac{1}{2}\,a\,(1 + 3\,\text{coſ. }2\,\eta),$$

ob α minimum. Ex his igitur prior aequatio colligitur fore

$$-\,4\,a\,\alpha\,(n-1)^2\,\text{coſ. }2\,\eta - a\,n\,n\,(1 + (\alpha + 2\,\beta)\,\text{coſ. }2\,\eta)$$
$$= -\,\frac{m}{a\,a}\,(1 - 2\,\alpha\,\text{coſ. }2\,\eta) + \tfrac{1}{2}\,a\,(1 + 3\,\text{coſ. }2\,\eta).$$

 In qua

In qua aequatione duplicis generis termini occurrunt: alteri abſoluti, alteri vero per coſ. 2η affecti, quos ergo ſeorſim inter ſe aequari conuenit. Ex terminis igitur abſolutis orietur

$$-ann = -\frac{m}{aa} + \tfrac{1}{2}a, \text{ ſiue } nn = \frac{m}{a^3} - \tfrac{1}{2},$$

vnde ſit $\frac{m}{a^3} = nn + \frac{1}{2}$; at alteri termini, per coſ. 2η diuiſi, praebent

$$-4a\alpha(n-1)^2 - ann(\alpha + 2\beta) = \frac{2m\alpha}{aa} + \tfrac{3}{2}a, \text{ ſiue}$$

$$4\alpha(n-1)^2 + nn(\alpha + 2\beta) + \tfrac{3}{2} = -\frac{2m\alpha}{a^3}.$$

§. 25. Tres igitur adepti ſumus conditiones, quas adimpleri oportet, ex quarum ſecunda $\frac{m}{a^3} = nn + \frac{1}{2}$, ſtatim deduci poteſt diſtantia $a = \sqrt[3]{\frac{2m}{2nn+1}}$. Quodſi porro in tertia aequatione loco $\frac{m}{a^3}$, ſcribatur valor $nn + \frac{1}{2}$, ea erit

$$4\alpha(n-1)^2 + nn(\alpha + 2\beta) + \tfrac{3}{2} = -2\alpha nn - \alpha,$$

ſiue

$$4\alpha(n-1)^2 + 3\alpha nn + 2\beta nn + \alpha + \tfrac{3}{2} = 0.$$

Prima vero conditio dederat $\beta + 2\alpha = \frac{3}{4n(n-1)}$, vnde ſit $\beta = \frac{3}{4n(n-1)} - 2\alpha$, qui valor in illa aequatione ſubſtitatus producit

$$4\alpha(n-1)^2 + \frac{3n}{2(n-1)} - \alpha nn + \alpha + \tfrac{3}{2} = 0,$$

ſiue

$$\alpha(3nn - 8n + 5) = \frac{-3n}{2(n-1)} - \tfrac{3}{2} = -\frac{3(2n-1)}{2(n-1)},$$

vnde elicitur $\alpha = \frac{-3(2n-1)}{2(n-1)^2(3n-5)}$, hincque

$$\beta = \frac{3(11nn - 12n + 5)}{4n(n-1)^2(3n-5)}.$$

Pro diſtantia autem a inuenimus $a = \sqrt[3]{\frac{2m}{2nn+1}}$.

§. 26.

§. 26. Hic autem probe notandum eſt, hos valores locum habere non poſſe, niſi numeri α et β fuerint valde exigui, vt earum quadrata et producta tuto negligi queant; vnde ſtatim patet, id fieri non poſſe, niſi numerus n accipiatur praegrandis. Ad hunc limitem aeſtimandum, quoniam poſuimus

$$v = a(1 + \alpha \operatorname{coſ.} 2\eta) \text{ et } \frac{d\Phi}{d\theta} = n(1 + \beta \operatorname{coſ.} 2\eta),$$

hinc quaeramus ipſum angulum Φ, qui erit

$$\Phi = n\theta + \beta n \int d\theta \operatorname{coſ.} 2\eta,$$

vbi quia eſt

$$d\eta = d\Phi - d\theta = (n-1)d\theta, \text{ erit } d\theta = \frac{d\eta}{n-1};$$

vnde fit

$$\int d\theta \operatorname{coſ.} 2\eta = \int \frac{d\eta \operatorname{coſ.} 2\eta}{n-1} = \frac{\operatorname{ſin.} 2\eta}{2(n-1)}$$

quamobrem habebimus $\Phi = n\theta + \frac{\beta n \operatorname{ſin.} 2\eta}{2(n-1)}$; ex qua forma facile intelligitur, dummodo poſterior pars non ſuperet aliquot minuta prima, terminos neglectos tuto omitti poſſe. At vero vnum minutum primum in partibus radii eſt 0,00029, vnde ſi ſumamus $n = 100$, valor formulae $\frac{\beta n}{2(n-1)}$, producit tantum 0,000142, ideoque ſemi-minutum primum. Ex quo tuto concludere licet, limitem, quem numerus n ſuperare debet, ſatis tuto conſtitui poſſe $n = 50$. Poſito autem $n = 50$ fit

$$\beta = \frac{3.26905}{200.49^2.145} = 0,001159, \text{ hincque}$$

$$\frac{n\beta}{2(n-1)} = \frac{50.\beta}{98} = 0,00059,$$

quae fractio valet ſatis exacte duo minuta prima; quamobrem ſtatui poſſe videtur, quamdiu numerus n maior fuerit quam 50, formulas inuentas tam exacte cum veritate conſentire, vt error prorſus ſentiri nequeat; contra vero,

ro, quo minor numerus n accipiatur quam 50, tum formulas noſtras continuo magis a veritate eſſe aberraturas, propterea quod his caſibus terminos, quos negleximus, non amplius omittere licet.

§. 27. Conſideremus igitur propius caſum quo $n = 50$, et quoniam iam inuenimus eſſe $\beta = 0,001159$, quaeramus etiam valorem ipſius $\alpha = -\frac{3(2n-1)}{2(n-1)^2(3n-1)}$, qui reperitur $\alpha = -0,000425$. Pro diſtantia autem a inuenienda, quia inuenimus $a^3 = \frac{2m}{2nn+1}$, erit

$$\frac{1}{a^3} = \frac{2nn+1}{2m} = \frac{1000000(2nn+1)}{6}, \text{ ob } m = \frac{3}{1000000}.$$

Cum igitur ſit $2nn + 1 = 5001$, erit $l\frac{1}{a^3} = 8,9209056$, ideoque $l\frac{1}{a} = 2,9736352$, conſequenter $\frac{1}{a} = 941$, ideoque $a = \frac{1}{941}$. Quare cum diſtantia Solis, quam hic vnitate deſignamus, contineat ſatis exacte 24000 ſemidiametros terrae, diſtantia huius Lunae a terra erit quaſi 25 ſemidiametrorum terreſtrium, ideoque plus quam duplo minor, quam diſtantia Lunae verae. Hinc autem motus talis Lunae per ſequentes duas aequationes exprimetur:

1°. $v = a(1 - 0,000425 \text{ coſ. } 2\eta)$;

2°. $\Phi = 50\,\theta + 0,00059 \text{ ſin. } 2\eta$

ſiue in minutis ſecundis $\Phi = 50\,\theta + 122'' \text{ ſin. } 2\eta$.

§. 28. Talis igitur Luna in diſtantia a Terra 25 ſemidiametrorum terreſtrium propemodum circulum motu vniformi eſſet deſcriptura, eiusque tempus periodicum praeciſe foret pars quinquageſima vnius anni, ideoque ſuas reuolutiones perageret tempore $7^d.\ 7^h$. Interim tamen in eius motu quaedam exiguae inaequalitates deprehendentur

dentur ab elongatione huius Lunae a Sole pendentes, quas ergo, vti in vera Luna fieri ſolet, variationem appellare liceat, quibus tam diſtantia a terra, quam locus medius, in formula 50θ contentus, afficietur; has ergo pro praecipuis angulis η hic ob oculos ponamus.

Variatio	$\eta = 0$ vel $= 180°$	$\eta = 45°$ vel $= 225°$
Diſtantiae	$-0,000425\,a$	0
Longitudo	0	$122''$

Variatio	$\eta = 90°$ vel $= 270°$	$\eta = 135°$ vel $= 315°$
Diſtantia	$0,000425\,a$	0
Longitudo	0	$-122''$

Scilicet in coniunctionibus et oppoſitionibus diſtantiam mediam a diminui oportet particula $\frac{a}{2352}$, quae tantum facit partem nonageſimam quartam ſemidiametri terrae, ſive circiter 9 milliaria Germanica; tum vero longitudo nulla eget correctione. Contra vero in quadraturis diſtantiam Lunae augeri oportet particula $\frac{a}{94}$, longitudo autem pariter nulla correctione indiget. At vero in octantibus, vbi $\eta = \begin{cases}45°\\225\end{cases}$ vel $\eta = \begin{cases}135°\\315\end{cases}$, diſtantia nullam correctionem poſtulat, longitudinem vero Φ priori caſu augeri, poſteriori vero diminui oportet quantitate $122''$, hoc eſt $2'$, $2''$. Multo minus autem motus talis Lunae a circulari vniformi foret diſcrepaturus, ſi eius diſtantia minor eſſet quam 25 ſemidiametrorum terrae.

§. 29. Quodſi velimus, vt talis Luna in ipſa ſuperficie terrae reuoluatur, ita vt ſit $a = \frac{1}{14603}$, hinc primo com-

computari debet valor numeri n, qui indicat, quot reuolutiones talis Luna interuallo vnius anni circa terram eſſet peractura. Cum igitur inuenerimus $nn + \frac{1}{2} = \frac{m}{a^3}$, erit

$$nn + \tfrac{1}{2} = 3 \cdot 240^3 \text{ ideoque } n = \sqrt{3 \cdot 240^3}$$

ex quo reperitur $n = 6439$. Toties ſcilicet talis Luna vno anno reuolueretur, qui numerus per 365 diuiſus oſtendet quoties talis Luna tempore 24 horarum circumferetur, ſcilicet $17\frac{2}{3}$, quod ſatis egregie conuenit cum calculo *Hugenii*, Euidens autem eſt valores α et β hoc caſu prorſus euaneſcere.

§. 30. Quanquam autem his caſibus, quibus diſtantia a non vltra 25 ſemidiametros terreſtres exſurgit, eius diſtantia a terra exiguam variationem patitur, ita vt orbita non perfecte ſit circularis, tamen tali orbitae ab Aſtronomis nulla excentricitas tribui ſolet, propterea quod inaequalitates a ſolo angulo η pendent, dum effectus excentricitatis ab Anomalia pendet, cuius hic nullum veſtigium apparet. Quemadmodum etiam diſtantiae verae Lunae a terra, haud exiguam variationem paterentur, etiamſi eius excentricitas euaneſceret.

§. 31. Cum determinationes hactenus inuentae tanquam exactiſſimae ſpectari queant, dummodo diſtantia talium Lunarum non notabiliter 25 ſemidiametros terreſtres ſuperet, hoc intelligi oportet, quando orbitae omni excentricitate carent, ita vt omnes inaequalitates tam in diſtantia, quam motus celeritate a ſola elongatione Solis, ſiue angulo η pendeant, ad cuiusmodi motum producendum manifeſtum eſt tali Lunae initio certum motum imprimi

primi debuiſſe. Sin autem motus impreſſus tantillo fuerit maior vel minor, inde ſtatim orietur quaepiam excentricitas, quae, dummodo fuerit ſatis parua, ſequenti modo definiri poterit.

Inueſtigatio motuum, qui oriuntur, ſi in caſibus praecedentibus praeter variationem etiam quam minima excentricitas acceſſerit.

§. 32. Quoniam pro effectu ab excentricitate oriundo certus quidam angulus in computum trahi debet, qui anomalia vocari ſolet, deſignemus iſtum angulum littera ζ, pro quo ponamus $d\zeta = i\,d\theta$, quem numerum i ex ipſis formulis noſtris determinari oportet. Simili igitur modo, quo ſupra angulum η in calculum introduximus, nunc quoque angulum ζ introducamus, ideoque ponamus

$$v = a(1 + \alpha \operatorname{cof.} 2\eta + \gamma \operatorname{cof.} \zeta);$$

$$\frac{d\Phi}{d\theta} = n(1 + \beta \operatorname{cof.} 2\eta + \delta \operatorname{cof.} \zeta);$$

vbi pariter ſupponimus coefficientes γ et δ eſſe quam minimos, ita vt earum combinationes tam inter ſe quam cum litteris α et β negligi queant. Hinc igitur ſimilis calculus inſtitui debebit, vt ante, et quoniam litterae α et β iam ſunt inuentae, hic tantum habebimus has formulas:

$$v = a(1 + \gamma \operatorname{cof.} \zeta) \text{ et } \frac{d\Phi}{d\theta} = n(1 + \delta \operatorname{cof.} \zeta).$$

Praeterea cum per litteras α et β omnes termini angulum η vel 2η inuoluentes iam ex aequationibus principalibus ſint ſublati, nunc ſufficiet has aequationes conſideraſſe:

$$1^\circ.\ \frac{ddv - v\,d\Phi^2}{d\theta^2} = -\frac{m}{vv} + \tfrac{1}{2}v \text{ et}$$

$$2^\circ.\ \frac{2\,dv\,d\Phi + v\,dd\Phi}{d\theta^2} = 0.$$

§. 33. His obſeruatis, cum ſit $d\zeta = i\,d\vartheta$, per differentiationem nanciſcemur

$$\frac{dv}{d\vartheta} = -ia\gamma\,\text{ſin.}\,\zeta \text{ et } \frac{ddv}{d\vartheta^2} = -iia\gamma\,\text{coſ.}\,\zeta;$$

tum vero $\frac{dd\Phi}{d\vartheta^2} = -in\delta\,\text{ſin.}\,\zeta$. Praeterea vero habebimus

$$\frac{1}{vv} = \frac{1}{aa}(1 + \gamma\,\text{coſ.}\,\zeta) = \frac{1}{aa}(1 - 2\gamma\,\text{coſ.}\,\zeta).$$

Hinc igitur poſterior aequatio induet hanc formam:

$$-2ina\gamma\,\text{ſin.}\,\zeta - ian\delta\,\text{ſin.}\,\zeta = 0,$$

vnde oritur $\gamma = -\frac{1}{2}\delta$. Prior autem aequatio facta ſubſtitutione induet hanc formam:

$$-iia\gamma\,\text{coſ.}\,\zeta - ann - ann(2\delta + \gamma)\text{coſ.}\,\zeta$$
$$= -\frac{m}{aa} + \frac{2m\gamma}{aa}\text{coſ.}\,\zeta + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a\gamma\,\text{coſ.}\,\zeta;$$

hinc termini abſoluti praebent, vt iam ſupra inuenimus,

$$\frac{m}{aa} = a\left(nn + \frac{1}{2}\right),$$

reliqui vero per $a\,\text{coſ.}\,\zeta$ diuiſi dant

$$-ii\gamma - nn(2\delta + \gamma) = \frac{2m\gamma}{a^3} + \frac{1}{2}\gamma = \left(2nn + \frac{3}{2}\right)\gamma.$$

Ante autem inuenimus $\delta = -2\gamma$, vnde fit

$$-ii + 3nn = 2nn + \frac{3}{2}, \text{ ideoque } ii = nn - \frac{3}{2}$$

ſiue $i = \sqrt{(nn - \frac{3}{2})}$. Ipſa autem quantitas γ hinc non definitur, ſed arbitrio noſtro relinquitur; tam paruus autem valor ipſi tribui debet, vt hypotheſis conſiſtere poſſit.

§. 34. Hic quantitas iſta γ idem denotat, quod vulgo excentricitas vocari ſolet, at vero angulus ζ eſt anomalia media et tempori ϑ ita proportionalis, vt ſit

$$\frac{d\zeta}{d\vartheta} = i = \sqrt{(nn - \frac{3}{2})};$$

vbi notetur, ſi eſſet $i = n$, tum anomaliam $\zeta = n\vartheta$ ipſi motui

motui medio fore aequalem, ideoque lineam abſidum quieſcere. Quia autem hinc valor ipſius i tantillo fit minor, ſcilicet $i = n - \frac{5}{4n}$, motus anomaliae aliquanto tardior erit, ideoque linea abſidum aliquantillum progreditur; tum vero formulae motum determinantes erunt:

$$v = a(1 + \alpha \operatorname{cof.} 2\eta + \gamma \operatorname{cof.} \zeta) \text{ et}$$

$$\frac{d\Phi}{d\theta} = n(1 + \beta \operatorname{cof.} 2\eta + \delta \operatorname{cof.} \zeta).$$

Ex poſteriore colligitur

$$\Phi = n\theta + \frac{\beta n}{2(n-1)} \operatorname{fin.} 2\eta - \frac{2n\gamma \operatorname{fin.} \zeta}{i};$$

vbi meminiſſe conuenit eſſe, vti ſupra inuenimus

$$a = \sqrt{\frac{2m}{2nn+1}};\ \alpha = -\frac{3(2n-1)}{2(n-1)^2(3n-5)} \text{ et}$$

$$\beta = \frac{3(11nn-12n+5)}{4n(n-1)^2(3n-5)}$$

quibus ergo motus talis Lunae accurate exprimitur, ſi modo fuerit $n > 50$, ſiue $a < 25$ ſemidiametrorum terreſtrium, ipſa autem excentricitas γ tam parua, vt inaequalitas inde in motu orta, ſcilicet $\frac{2n\gamma}{i}$, in angulum conuerſa, non vltra aliquot minuta prima aſcendat; quod ob $i = n$ proxime euenit, ſi γ non ſuperet 0, 00029, qui eſt valor vnius minuti primi. Ex his enim formulis ad quoduis tempus tam diſtantiam talis Lunae a terra, quam eius veram longitudinem aſſignare licebit. Quod autem ad ipſum motum abſidum attinet, quoniam tempore vnius anni n reuolutiones peraguntur a termino fixo, at vero, reuolutiones a linea abſidum computando, pauciores reuolutiones, ſcilicet $i = n - \frac{5}{4n}$ abſoluuntur, linea abſidum interea proceſſiſſe cenſenda eſt per $\frac{5}{4n} . 360° = \frac{270°}{n}$. Vnde ſi $n = 50$, motus annuus apogaei erit $\frac{27°}{5} = 5°, 24'$; quo maior autem fuerit numerus n, eo tardior erit iſte motus.

 §. 35.

Tab. X. Fig. 6. §. 35. Vt iſte motus lineae abſidum clarius percipiatur, ſit T Π recta ad apogaeum Π ducta, voceturque angulus A T Π $= \pi$, Luna autem verſetur in L, ita vt ſit angulus A T L $= \Phi$ et anomalia Π T L $= \zeta$, eritque $\Phi = \pi + \zeta$. Cum iam ſecundum motum medium ſit $d\Phi = n\, d\theta$ et $d\zeta = i\, d\theta$, erit $d\pi = (n-1)\, d\theta$, vbi $\frac{d\pi}{d\theta}$ denotat celeritatem lineae abſidum, vnde, tempore per angulum θ expreſſo, linea abſidum promouebitur per angulum $(n-1)\theta$, ideoque tempore vnius anni, quo ſit $\theta = 360^\circ$, linea abſidum progredietur per angulum $(n-1)\, 360^\circ$. Ex quo patet, ſi eſſet $i = n$, tum lineam abſidum perfecte quieſcere. In caſu vero oblato vidimus eſſe $i = \surd(nn - \frac{3}{2}) = n - \frac{3}{4n}$; vnde ſequitur, interuallo vnius anni apogaeum Lunae promoueri per angulum $\frac{270^\circ}{n}$, ſicque quo maior fuerit numerus n, hoc eſt, quo minor fuerit diſtantia a, eo tardiorem fore motum apogaei; contra vero eo celeriorem, quo minor fuerit n. Hoc autem tantum intelligi debet, quando $n > 50$ et $a < 25$ ſemidiametrorum terreſtrium; pro maioribus diſtantiis autem, vbi motus magis erit perturbatus, promotio lineae abſidum aliam ſequetur rationem, namque pro Luna vera eſt propemodum $n = 13$, vnde pro motu annuo apogaei iſta formula tantum praeberet $\frac{10}{13}$. 20°, qui tamen reuera propemodum duplo eſt maior.

§. 36. In caſibus igitur hactenus tractatis, quibus $n > 50$ et excentricitas γ tam exigua vti ſupponimus, determinatio loci talis Lunae duas tantum correctiones poſtulat, quarum altera ab angulo 2η pendet, quae variatio vocatur, altera vero ab angulo ζ, quo anomalia deſignatur. Quando autem excentricitas γ notabiliter maior eſt quam

o,

o, 00029, hoc eſt quam $\frac{3}{10000}$, tum inſuper in calculum introduci neceſſe eſt terminos, qui oriuntur ex combinatione binorum terminorum, qui iam angulos 2η et ζ continent, vnde naſcuntur noui anguli, ſcilicet 2ζ, atque adeo porro 3ζ, 4ζ etc. ac praeterea etiam anguli $2\eta \pm \zeta$; imo etiam porro $2\eta \pm 2\zeta$, $2\eta \pm 3\zeta$ etc. Ex quo intelligitur, quo maior fuerit excentricitas γ, eo pluribus opus eſſe correctionibus ad locum talis Lunae determinandum.

§. 37. Haec ita ſe habent, quando numerus reuolutionum quotannis peractarum non notabiliter minor eſt quam 50, ſiue diſtantia media non multum ſuperat 25 ſemidiametros terreſtres. Conſideremus nunc etiam caſus, quibus diſtantia a multum ſuperat hunc limitem. Ac primo quidem omnem excentricitatem remoueamus, ita vt omnes inaequalitates a ſolo angulo η pendeant, et quoniam tum binos pluresue huiusmodi angulos inuicem combinari oportet, praeter angulum 2η etiam eius multipla in computum ingredientur, ſcilicet 4η, 6η etc.; tum vero, aucta diſtantia a vel v, ſeries pro $\frac{1}{u^3}$ inuenta vsque ad tertium terminum extendi debebit, vnde in noſtras aequationes etiam anguli η et 3η ingredientur, a quibus eae correctiones pendent, quae parallacticae vocari ſolent, quoniam a vera diſtantia Solis a Terra pendent.

§. 38. Quodſi iam praeterea excentricitas quam minima accedat, cui reſpondeat anomalia ζ, praeter angulos ante memoratos inſuper introducentur anguli $2\eta \pm \zeta$; $4\eta \pm \zeta$ ac fortaſſe etiam $6\eta \pm \zeta$; tum vero etiam ex parallacticis natae: $\eta \pm \zeta$ et $3\eta \pm \zeta$. Sin autem excentri-

citas maior euadat, vt etiam angulorum 2ζ, 3ζ, 4ζ etc. ratio haberi debeat, per combinationem inſuper accedent anguli $2\eta \pm 2\zeta$; $4\eta \pm 2\zeta$; $6\eta \pm 2\zeta$; etc. itemque porro anguli $2\eta \pm 3\zeta$; $4\eta \pm 3\zeta$; etc. quin etiam $\eta \pm 2\zeta$; $3\eta \pm 2\zeta$. Vnde patet, quo maior fuerit diſtantia Lunae a Terra, ſimulque excentricitas, numerum angulorum, a quibus omnes correctiones pendent, continuo magis increſcere, atque adeo tandem tam magnum euadere poſſe, vt ob ipſam multitudinem determinatio fiat incerta, praeterquam quod labor, omnes iſtas correctiones per calculum definiendi, mox vires Analyſeos eſſet ſuperaturus.

§. 39. Haec clariora reddentur, ſi tabulas pro motu verae Lunae determinando contemplemur, quae primo manifeſto inuoluunt angulos 2η, 4η, item 3η, ex quibus coniunctis variatio Lunae emergit; deinde ſecundo angulos ζ, 2ζ, 3ζ et 4ζ, qui coniunctim exhibent aequationem centri; tertio vero inſuper accedunt anguli per combinationem orti, ſcilicet:

$2\eta \pm \zeta$; $4\eta \pm \zeta$; $2\eta \pm 2\zeta$; $4\eta \pm 2\zeta$; $2\eta \pm 3\zeta$; tum vero etiam $\eta \pm \zeta$; $3\eta \pm \zeta$. Hae ſcilicet correctiones ſolae ſufficerent, ſi terra circa Solem vniformiter in circulo reuolueretur, ſimulque tota Lunae orbita in eclipticam incideret; verum ob motum Solis inaequabilem, anomalia etiam Solis et, ob inclinationem orbitae Lunaris, etiam argumentum Latitudinis in computum ingrediuntur, quos duos nouos angulos cum ſingulis praecedentium combinari oportet, vnde tantus correctionum numerus originem traxit.

§. 40. His perpenſis abunde intelligitur, ſi daretur eiusmodi Luna, quae in multo maiori diſtantia circa ter-

terram reuolueretur, tum numerum omnium correctionum tantopere multiplicatum iri, vt motus plane non amplius per huiusmodi tabulas repraeſentari poſſet, ideoque nobis etiamnunc foret inperſcrutabilis; quamobrem ſummopere neceſſe erit, in alium modum maxime diuerſum, huiusmodi Lunae motum repraeſentandi, inquirere, cuius quidem adhuc ne vel minimam notionem nobis formare valemus. Hae autem difficultates eo magis increſcent, quo propius orbita talis Lunae ad limitem ſphaerae lunaris ſupra fixum, ſcilicet $a = \frac{1}{100}$ acceſſerit. Ac ſi talis Luna exiſteret, fateri cogeremur, nos nullam prorſus ideam eius motus ne mente quidem concipere poſſe, talemque motum prorſus fore inextricabilem, niſi forte noſtra ſcientia analytica inſignibus incrementis fuerit locupletata.

§. 41. Cum igitur, quo propius diſtantia talis Lunae ad limitem ſupra definitum $a = \frac{1}{100}$ appropinquauerit, eius motus continuo magis fiat irregularis, atque adeo vires noſtri ingenii ſuperet, eo magis eſt mirandum, quod in ipſo limite $a = \frac{1}{100}$ contingere poſſet, vt Luna motu adeo vniformi in circulo circumferretur. Verum iſtum caſum comparari conueniet cum eiusmodi ſtatu aequilibrii, qui labilis ſeu caducus appellari ſolet. Veluti quando acus cuſpide inſiſtit: ſimul ac enim quam minime ob hoc ſtatu fuerit aberratus, tota machina in ruinam delabitur. Simili modo ſi motus huiusmodi Lunae quam minime a motu illo regulari deficiat, ſubito maxime euadet irregularis, neque vllis regulis vel tabulis comprehendi poterit.

DE

DE MOTIBVS MAXIME IRREGVLARIBVS, QVI IN SYSTEMATE MVNDANO LOCVM HABERE POSSENT, VNA CVM METHODO HVIVSMODI MOTVS PER TEMPORIS SPATIVM QVANTVMVIS MAGNVM PROSEQVENDI.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

In praecedente diſſertatione nobis licuit limites naturales definire, quos inter planetas primarios et ſecundarios ſtabilire conuenit. Oſtendimus enim ſphaeram lunarem a centro terrae vsque ad partem centeſimam diſtantiae Solis extendi, quandoquidem in hac diſtantia euenire poſſet, vt corpus certo modo proiectum, tam circa terram, quam circa Solem, circulum motu vniformi deſcriberet; ſimilique modo ſphaeram ſatellitiam Iouis circiter ad partem decimam quintam eius diſtantiae a Sole, Saturni autem ad partem viceſimam circiter diſtantiae a Sole porrigi obſeruauimus. Quibus limitibus conſtitutis omnia corpora, quae intra eos reuolutiones ſuas peragunt, ad claſſem Satelli-

tellitum, quae autem extra eos motum ſuum abſoluunt, inter planetas principales referri conueniet.

§. 2. Quanquam autem in ipſis his limitibus motus exiſtere poteſt maxime regularis, quippe qui in circulo vniformiter peageretur: tamen hic ſe maximum paradoxon obtulit, in hoc conſiſtens, quod ſi motus vel minime ab iſta regularitate diſcrepauerit: in eo ſtatim maximae perturbationes ſe admiſceant, quas nullo adhuc modo in Aſtronomia vſitato ad certam legem reuocare liceat. Neque enim his caſibus tales perturbationes more ſolito per certas tabulas aequationum, proxime ſaltem, repraeſentari poterunt, quaecunque etiam talium tabularum argumenta in ſubſidium vocentur; atque hae perturbationes eo erunt maiores, quo propius huiusmodi motus ad ipſos limites deſignatos acceſſerint.

§. 3. Hinc intelligitur, tria genera huiusmodi motuum maxime perturbatorum conſtitui debere, quorum primum ea complectatur corpora, quae totum ſuum motum intra limites deſignatos circa planetam primarium abſoluant, quae ergo ad claſſem Lunarum ſeu ſatellitum referri oportet. Quae autem corpora extra ſphaeram lunarem ſeu ſatellitiam non procul a limitibus motum ſuum circa Solem abſoluunt, ea ſine dubio planetis principalibus annumerari debebunt, etiamſi eorum motus tantopere perturbetur, vt nullis plane aequationibus ad certam legem reduci queat. Tertium denique genus eiusmodi comprehendet corpora, quae ita oblique moueantur, vt modo ex ſphaera lunari egrediantur, modo ſe iterum in eam immergant; talia enim corpora alio tempore tanquam ſa-

tellites, alio vero tanquam planetae principales ſpectari debebunt, cuiusmodi motus quemadmodum ſaltem menti vero tantum proxime repraeſentari queat, nequaquam adhuc intelligere licet. Si enim talia corpora in ſyſtemate noſtro ſolari occurrerent, eorum motus nobis adhuc penitus foret ignotus, ita vt eius loca in coelo nunquam ſine craſſiſſimo errore praedicere valeremus.

§. 4. His ſummis difficultatibus perpenſis, quilibet facile agnoſcet, quam diu in tanta ignoratione circa huiusmodi motus verſabimur, nos nullo modo ſperare poſſe, vt vnquam ad accuratam cognitionem omnium perturbationum, quibus vel planetae primarii, vel ſatellites revera premuntur, pertingere valeamus. Quamdiu enim nobis impoſſibile manebit, motum alius Lunae, quae ad diſtantiam vel duplo, vel triplo, vel adeo quadruplo maiorem circa terram reuolueretur, perſcrutari, nullo modo perfectam cognitionem omnium inaequalitatum verae Lunae aſſequi poterimus. Simili modo quoniam, ſi inter orbitas Iouis et Saturni exiſteret planeta primarius, eius motus nobis plane futurus eſſet imperſcrutabilis, hinc manifeſto ſequitur, etiam nullam perfectam cognitionem omnium perturbationum, quae in motu Saturni obſeruantur, exſpectari poſſe.

§. 5. Haec autem tanta impedimenta nullo modo ſuperari poterunt, niſi maxima incrementa in ſcientiam noſtram analyticam inferantur. Cum enim omnes motus, quantumuis fuerint perturbati, nunc quidem ſine vlla difficultate aequationibus analyticis comprehendi queant, totum negotium ad idoneam harum aequationum reſolutionem

reuo-

reuoluitur. Ad hoc autem tanta incrementa deſiderantur, qualia vix adhuc, vel ne vix quidem, ſperari poſſe videntur. Interim tamen nullum eſt dubium, ſi talis motus reuera in mundo exiſteret, quem per longum temporis ſpatium nobis obſeruare licuiſſet, quin Aſtronomi in eiusmodi artificia incidiſſent, quibus vero ſaltem proxime talem motum ad certam legem quodammodo reuocare potuiſſent. Hanc ob rem ſi ſatis longam ſeriem talium obſeruationum, quales eiusmodi corpus ſuppeditaret, ob oculos exponere poſſemus, earum contemplatio vſu certe non eſſet caritura, eaque fortaſſe tutiſſimam viam nobis aperiret ad pleniorem cognitionem huiusmodi motuum appropinquandi.

§. 6. Quanquam autem vix vlla ſpes ſupereſt, aequationes analyticas, quibus tales motus continentur, perfecte reſoluendi: tamen iam pridem eiusmodi methodum propoſui, cuius beneficio huiusmodi motus quantumvis irregulares quaſi gradatim ita proſequi licet, vt ſi modo pro certo quodam tempore talis corporis tam locum quam motum nouerimus, inde ad quaeuis temporum interualla ſequentia verus locus ſatis exacte determinari queat. Haec igitur methodus nobis iſtum eximium vſum praeſtare poteſt, vt ſi talis motus exiſteret, longiſſimam ſeriem obſeruationum exhibere valeamus, quibus per longum temporis ſpatium vera loca talis corporis in coelo definiantur, quarum ergo contemplatio nos ad pleniorem cognitionem manuducere poterit.

§. 7. Vt igitur hanc viam ineamus et impedimenta minoris momenti remoueamus, fingamus terram in

plano eclipticae motu vniformi circa Solem in circulo reuolui, cuius radium vnitate exprimamus, eiusque motus commodiſſimam temporis menſuram ſuppeditabit. Deinde maſſam Solis pariter vnitate deſignemus, cuius reſpectu maſſa terrae ſit $= m$, exiſtente $m =$ [illegible]. Iam in ipſo plano eclipticae moueatur tale corpus lunare, cuius mo-
Tab. XI. Fig. 1. tum ſcrutamur, atque ad certum quodpiam tempus, dum terram in T quieſcentem ſpectamus, ſit centrum Solis in S, exiſtente $TS = 1$, Luna autem, quam conſideramus, in L, cuius diſtantiam a Terra vocemus $TL = v$, et angulus $ATL = \Phi$, pro Sole vero ponatur angulus $ATS = \theta$, qui ergo nobis menſuram temporis praebebit, cuius elementum $d\theta$ in ſequentibus aequationibus conſtans eſt aſſumtum. Praeterea vero ponamus breuitatis gratia angulum $STL = \Phi - \theta = \eta$ et diſtantiam Lunae a Sole $LS = u$, ita vt ſit

$$u = \sqrt{(1 - 2v \operatorname{coſ.} \eta + vv)},$$

quibus poſitis motus quaeſitus iſtius Lunae L binis ſequentibus aequationibus exprimetur:

$$1^\circ.\ \frac{(1+m)(ddv - v\,d\Phi^2)}{d\theta^2} = \frac{m}{vv} - \operatorname{coſ.} \eta \left(1 - \frac{1}{u^3}\right) - \frac{v}{u^3}.$$

$$2^\circ.\ \frac{(1+m)(2\,dv\,d\Phi + v\,dd\Phi)}{d\theta^2} = \operatorname{ſin.} \eta \left(1 - \frac{1}{u^3}\right),$$

vti ſcilicet in praecedente diſſertatione oſtendimus.

§. 8. Hae aequationes tam ſunt generales, vt aeque pateant ad omnia corpora, quae tam intra ſphaeram lunarem quam extra in plano eclipticae reuoluuntur. Quoniam autem hic nobis potiſſimum eſt propoſitum in motus lunares inquirere, ita vt diſtantia v nunquam ſuperet partem centeſimam diſtantiae Solis, ſiue [illegible], ſatis ex-

exacte ſtatuere licebit $\frac{1}{u^3} = 1 + 3v \cos. \eta$, et quoniam fractio $m = \frac{1}{1000000}$ eſt quaſi euaneſcens, loco $1 + m$ tuto ſcribere licebit 1, vnde binae aequationes modo traditae ſequentes formas adipiſcentur:

$$\text{I. } \frac{ddv - vd\Phi^2}{d\theta^2} = -\frac{m}{vv} + \frac{1}{2}v(1 + 3\cos. 2\eta) \text{ et}$$

$$\text{II. } \frac{2dvd\Phi + vdd\Phi}{d\theta^2} = -\frac{3}{2}v \sin. 2\eta,$$

ex quibus quemadmodum motum iſtius Lunae gradatim proſequi queamus, vt ad quoduis tempus, poſtquam fuerit in L, eius locus innoteſcat, hic imprimis explicemus.

§. 9. Sumamus igitur pro certa epocha iſtam Lunam fuiſſe in L, cuius tam diſtantia a Terra $TL = v$ quam angulus $ATL = \Phi$ fuerit cognitus, perinde ac locus Solis, ſeu angulus $ATS = \theta$, quo ſimul tempus iſtius epochae definiatur, ſi quidem ponamus ipſo motus initio Solem fuiſſe in A, Lunam vero in l. Hinc igitur pro epocha aſſumta etiam datus erit angulus $STL = \eta = \Phi - \theta$. Praeterea quia etiam motus huius Lunae in L vt cognitas ſpectatur, etiam dabitur tam eius motus, quo a Terra recedit, cuius celeritas eſt $\frac{dv}{d\theta}$, quam eius motus angularis, cuius celeritas celeritas eſt $\frac{d\Phi}{d\theta}$, quae binae celeritates cum ſint cognitae, ponamus $\frac{dv}{d\theta} = p$ et $\frac{d\Phi}{d\theta} = q$, et cum hinc ſit

$$\frac{ddv}{d\theta^2} = \frac{dp}{d\theta} \text{ et } \frac{dd\Phi}{d\theta^2} = \frac{dq}{d\theta},$$

his valoribus ſubſtitutis noſtrae ambae aequationes erunt

$$\text{I}^\circ.\ \frac{dp}{d\theta} - qqv = -\frac{m}{vv} + \frac{1}{2}v(1 + 3\cos. 2\eta)$$

$$\text{II}^\circ.\ 2pq + \frac{vdq}{d\theta} = -\frac{3}{2}v \sin. 2\eta.$$

Hinc iam cognoſcimus mutationes momentaneas, quas lit-

terae p et q accipiunt; erit enim

$$\frac{dp}{d\theta} = qqv - \frac{m}{vv} + \tfrac{1}{2}v\,(1 + 3\,\mathrm{coſ.}\,2\,\eta) \text{ et}$$

$$\frac{dq}{d\theta} = -\frac{2pq}{v} - \tfrac{3}{2}\,\mathrm{ſin.}\,2\,\eta,$$

dum ipſarum quantitatum v et Φ mutationes momentaneae ſunt $\frac{dv}{d\theta} = p$ et $\frac{d\Phi}{d\theta} = q$.

§. 10. Ex cognitis autem his mutationibus, ſeu differentialibus primis, etiam differentialia altiora elici poterunt. Cum enim ſit $d\eta = d\Phi - d\theta$, erit $\frac{d\eta}{d\theta} = q - 1$, vnde differentiando reperiemus

$$\text{I}^{\circ}.\ \frac{ddp}{d\theta^2} = pqq + 2qv\frac{dq}{d\theta} + \frac{2mp}{v^3} + \tfrac{1}{2}p\,(1 + 3\,\mathrm{coſ.}\,2\eta) - 3v\,(q - 1)\,\mathrm{ſin.}\,2\,\eta$$

$$\text{II}^{\circ}.\ \frac{ddq}{d\theta^2} = -\frac{2q}{v}\frac{dp}{d\theta} - \frac{2p}{v}\frac{dq}{d\theta} + \frac{2ppq}{vv} - 3\,(q - 1)\,\mathrm{coſ.}\,2\,\eta,$$

quae expreſſiones reducuntur ad ſequentes:

$$\text{I}^{\circ}.\ \frac{ddp}{d\theta^2} = -3\,pqq + \frac{2mp}{v^3} + \tfrac{1}{2}p\,(1 + 3\,\mathrm{coſ.}\,2\,\eta) - 3v\,(2q - 1)\,\mathrm{ſin.}\,2\,\eta$$

$$\text{II}^{\circ}.\ \frac{ddq}{d\theta^2} = -q\,(2qq + 1) + \frac{2mq}{v^3} + \frac{6ppq}{vv} + \frac{3p\,\mathrm{ſin.}\,2\,\eta}{v} - 3\,(2q - 1)\,\mathrm{coſ.}\,2\,\eta.$$

Similique modo etiam altiora differentialia, ſi opus fuerit, definiri poterunt.

§. 11. His autem differentialibus inuentis, tam ſitus quam motus noſtrae Lunae, quae nunc erat in L, ad datum quoduis tempus hinc elapſum, quod ſit $= \omega$, aſſignari poterit. Si enim pro tempore ab initio elapſo $\theta + \omega$, quod deſignemus per θ', quatuor quantitates ſitum et motum continentes ponantur p', q', v' et Φ', eas tales

tales functiones ipſius $\theta + \omega$ eſſe oportet, quales ipſae quantitates primitiuae p, q, v et Φ erant functiones ipſius θ tantum; vnde ex principiis calculi differentialis conſtat fore:

$$v' = v + \omega \frac{dv}{d\theta} + \frac{\omega^2 ddv}{1.2.d\theta^2} + \frac{\omega^3 d^3 v}{1.2.3 d\theta^3} + \frac{\omega^4 d^4 v}{1.2.3.4.d\theta^4} + \text{etc.}$$

Hinc igitur, ſi loco $\frac{dv}{d\theta}$ ſcribatur p, habebitur

$$v' = v + \omega p + \frac{\omega^2 dp}{2 d\theta} + \frac{\omega^3 ddp}{6 d\theta^2} + \frac{\omega^4 d^3 p}{24 d\theta^3} + \text{etc.}$$

atque eodem modo tres reliquae quantitates definientur:

$$\Phi' = \Phi + \omega q + \frac{\omega^2 dq}{2 d\theta} + \frac{\omega^3 ddq}{6 d\theta^2} + \frac{\omega^4 d^3 q}{24 d\theta^3} + \text{etc.}$$

$$p' = p + \frac{\omega dp}{d\theta} + \frac{\omega^2 ddp}{2 d\theta^2} + \frac{\omega^3 d^3 p}{6 d\theta^3} + \text{etc.}$$

$$q' = q + \frac{\omega dq}{d\theta} + \frac{\omega^2 ddq}{2 d\theta^2} + \frac{\omega^3 d^3 q}{6 d\theta^3} + \text{etc.}$$

§. 12. Si has ſeries in infinitum extendere vellemus, ad quoduis tempus ω, poſt epocham elapſum, quantumuis fuerit magnum, tam ſitum quam motum Lunae aſſignare valeremus, quod quidem laborem infinitum exigeret. Verum etiam manifeſtum eſt, has ſeries eo promtius conuergere, quo minus accipiatur interuallum temporis ω; quam ob cauſam ipſi maiorem valorem tribui non conueniet, quam vt ſufficiat, tres tantum, vel ad ſummum quatuor terminos illarum ſerierum ſumſiſſe; tum quouis caſu haud difficulter diiudicabitur, quovsque hoc temporis interuallum ω augere liceat, ne error ſenſibilis ſit metuendus. Poſtquam autem hoc modo ad tempus $\theta + \omega$ fuerit peruentum, in eo conſtituatur noua epocha, a qua pari modo vlterius per ſimile tempus ω progredi licebit; haecque operationes, quoties lubuerit, repeti poterunt. Vnde perſpicuum eſt, hac ratione plurima Lunae loca per ſatis mag-

magnum temporis interuallum aſſignari, ac talem obſeruationum ſeriem pro lubitu vlterius continuari poſſe.

§. 13. Quoniam inueſtigatio altiorum differentialium binarum quantitatum p et q ſatis moleſtum calculum poſtulat et mox ad enormem terminorum numerum excreſcit: hoc labore facile ſuperſedere poterimus, ſi modo interuallo temporis ω aliquanto minorem valorem tribuamus; tum autem iſtas operationes pluries repetere oportebit. Neque vero etiam neceſſe erit, in his determinationibus ſummum rigorem obſeruare, quaſi talis motus in coelo reuera exiſteret; ſed quoniam noſtrum inſtitutum eo tantum dirigitur, vt ex contemplatione ſatis longae ſeriei huiusmodi obſeruationum certum quendam ordinem et legem, quaſi diuinando eliciamus: parum referet, vtrum loca asſignata ſummo rigore fuerint computata, ſiue parumper a veritate diſcrepauerint. Qui ergo talem laborem ſuſcipere voluerit, haud exiguum fructum in Aſtronomiam attuliſſe erit cenſendus.

Exemplum.

§. 14. Ponamus primo initio, cum Sol verſaretur in A, corpus noſtrum lunare in ipſo plano eclipticae ad diſtantiam a Terra T I = c, eos ita normaliter ad directionem TA fuiſſe proiectum, vt eius motus angularis circa Terram duplo rapidior fuerit quam motus Solis, atque ex hac determinatione ſtatus naturalis inueſtigabimus motum, quo hoc corpus deinceps eſt progreſſurum. In hoc igitur tempore primam epocham conſtituamus, pro qua propterea habebimus ſequentes conditiones:

1°.

1°. Longitudinem Solis $\theta = 0$, eius diſtantia a Terra perpetuo manente $= 1$.

2°. Longitudinem Lunae $\Phi = 0$, ideoque etiam $\eta = 0$.

3°. Diſtantiam Lunae a Terra $v = 0,008$, ideoque $l\,v = 7,9030900$.

4°. Quia prima motus directio in puncto I erat ad rectam T A normalis, habebimus $\frac{dv}{d\theta} = p = 0$.

5°. Quia motum angularem Lunae impreſſum duplo celeriorem ſtatuimus quam motum Solis, erit $\frac{d\Phi}{d\theta} = q = 2$.

§. 15. His iam pro prima epocha conſtitutis, ex formulis noſtris ſupra inuentis erit:

1°. $\frac{dp}{d\theta} = 4.0,008 - \frac{m}{vv} + 2\,v$; 2°. $\frac{dq}{d\theta} = 0$.

Pro priore autem formula erit $4\,v = 0,032$; deinde ob $m = \frac{3}{1000000}$, ideoque $l\,m = 4,4771213$, erit

$$\frac{m}{v\cdot v} = 0,046875 \text{ et } 2\,v = 0,016,$$

vnde habebimus $\frac{dp}{d\theta} = 0,001125$. Simili modo pro differentialibus ſecundis ipſarum p et q habebimus

$$3\,p\,q\,q = 0;\ \frac{2\,m\,p}{v^3} = 0;\ \tfrac{1}{2}\,p\,(1 + 3\,\text{coſ.}\,2\,\eta) = 0;$$

$$3\,v\,(2\,q - 1)\,\text{ſin.}\,2\,\eta = 0, \text{ ideoque } \frac{ddp}{d\theta} = 0,$$

Tum vero ob

$$-q\,(2\,q\,q + 1) = -18;\ \frac{2\,m\,q}{v^3} = 23,43750;$$

$$\frac{6\,p\,p\,q}{v\,v} = 0;\ \frac{3\,p\,\text{ſin.}\,2\,\eta}{v} = 0;$$

$$-3\,(2\,q - 1)\,\text{coſ.}\,2\,\eta = -9, \text{ erit}$$

$$\frac{ddq}{d\theta^2} = -3,5625.$$

§. 16.

§. 16. Hinc iam, poſtquam elapſum fuerit tempus $= \omega$, pro ſtatu corporis lunaris habebimus ſequentes determinationes:

1°. $\theta' = \omega$.

2°. $v' = 0,008 + \omega . 0 + \omega^2 . 0,000562 + \frac{1}{6}\omega^3 . 0$.

3°. $\Phi' = 0 + 2\omega + \frac{1}{2}\omega^2 . 0 - \omega^3 . 0,59375$.

4°. $p' = 0 + \omega . 0,001125 + \frac{1}{2}\omega^2 . 0$.

5°. $q' = 2 + \omega . 0 - \omega^2 . 1,78125$.

Vbi iam pro ω quaeuis tempora, dummodo ſatis fuerint exigua, aſſumere licebit. Quia autem tempora per ipſum motum Solis, ſeu angulum θ exhibere inſtituimus, per ſingulos gradus progrediemus, ponendo ſucceſſiue $\omega = 1°$; $\omega = 2°$; $\omega = 3°$; etc. vbi notetur tempus vni gradui reſpondens fore $= 1^d, 0^h, 21'$. In ſubſidium autem calculi apponamus valores ipſius ω in partibus radii, ſimulque logarithmos adiungamus.

	$\omega = 1°$.	$\omega = 2°$.	$\omega = 3°$.	$\omega = 4°$.	$\omega = 5°$.
ω.	0,017452	0,034904	0,052356	0,069808	0,087260
$l\,\omega$.	8,241845	8.542875	8,718966	8.843905	8.940815
$l\,\omega^2$.	6,483690	7,085750	7,437932	7,687810	7,881630
$l\,\omega^3$.	4,725535	5,628625	6,156898	6,531715	6,822445

§. 17. His praemiſſis facile erit ad ſingula tempora per 1°, 2°, 3°, 4°, etc. expreſſa et ab epocha elapſa ſtatum noſtrae Lunae aſſignare; vbi tantum notetur, quoniam longitudo Φ in gradibus et minutis exprimi debet, formulam inuentam in genere ita eſſe repraeſentandam:

$$\Phi' = \Phi + \omega \left(q + \frac{1}{2}\omega . \frac{dq}{d\theta} + \frac{1}{6}\omega^2 . \frac{ddq}{d\theta^2} + \text{etc.} \right)$$

at-

atque in membro poſteriore factorem ω in gradibus, alterum vero factorem vncinulis incluſum in partibus radii exprimi debere. Quo obſeruato ab ipſa epocha per ſingulos gradus progrediamus, ac ſtatum noſtrae Lunae in ſequenti tabula repraeſentemus:

	$\omega = 1°.$	$\omega = 2°.$	$\omega = 3°.$	$\omega = 4°.$	$\omega = 5°.$
θ'.	1°, 0′	2°, 0′	3°, 0′	4°, 0′	5°, 0′
Φ'.	2°, 0′	3°, 59′	5°, 59′	7°, 59′	9°, 58′
η'.	1°, 0′	1°, 59′	2°, 59′	3°, 59′	4°, 58′
v'.	0,008000	0,008000	0,008001	0,008003	0,008004
p'.	0,000019	0,000039	0,000059	0,000078	0,000098
q'.	1,999458	1,997830	1,995117	1,991319	1,986437

Videtur igitur in hac epocha prima ſatis tuto ad tempus $\omega = 5°$ progredi licere, neque a terminis neglectis, ſeu altioribus poteſtatibus ipſius ω vllum notabilem errorem eſſe metuendum; hanc ob rem cum primam epocham ad tempus $\theta = 0$ conſtituerimus, ſequentes epochas ad tempora $\theta = 5°$; $\theta = 10°$; etc. conſtituamus.

Epocha ſecunda.

§. 18. Secunda igitur epocha conſtituatur ad tempus $\theta = 5°$, pro qua ergo elementa noſtra erunt:

$\theta = 5°, 0'$	$v = 0,008004$	$lv = 7,903307$
$\Phi = 9°, 58'$	$p = 0,000098$	$lp = 5,991226$
$\eta = 4°, 58'$	$q = 1,986437$	$lq = 0,297075$
$2\eta = 9°, 56'$		

Nunc pro differentialibus primis dp et dq quaerantur ſequentes valores:

$q\,q\,v = 0,031438$	$\frac{2\,p\,q}{v} = 0,048530$
$\frac{m}{v\,v} = 0,046875$	$\frac{1}{2}$ ſin. $2\,\eta = 0,258753$
$\frac{1}{2}\,v = 0,004002$	$\frac{1}{2}\,v$ coſ. $2\,\eta = 0,011826$

vnde colligitur fore

$$\frac{d\,p}{d\,\theta} = 0,000391 \text{ et } \frac{d\,q}{d\,\theta} = -0,307283.$$

Pro differentialibus autem ſecundis quaeri oportet ſequentes valores:

$3\,p\,q\,q = 0,001154$	$q\,(2\,q\,q + 1) = 17,555237$
$\frac{2\,m\,p}{v^3} = 0,001146$	$\frac{2\,m\,q}{v^3} = 23,19022$
$\frac{1}{2}\,p = 0,000049$	$\frac{6\,p\,p\,q}{v\,v} = 0,001782$
$\frac{1}{2}\,p$ coſ. $2\,\eta = 0,000144$	$\frac{2\,p\,\text{ſin.}\,2\,\eta}{v} = 0,006336$
$6\,v\,q$ ſin. $2\,\eta = 0,016417$	$3\,(2\,q - 1)$ coſ. $2\,\eta = 8,78490$
$3\,v$ ſin. $2\,\eta = 0,004142$	

vnde colligitur

$$\frac{d\,d\,p}{d\,\theta^2} = -0,012090 \text{ et } \frac{d\,d\,q}{d\,\theta^2} = -3,141799.$$

Quodſi iam iterum ſucceſſiue pro ω ſcribamus 1°, 2°, 4°, 5° prodit ſequens tabella:

	$\omega = 1°.$	$\omega = 2°.$	$\omega = 3°.$	$\omega = 4°.$	$\omega = 5°.$
Φ'.	11°, 57′	13°, 55′	15°, 53′	17°, 51′	19°, 48′
θ'.	6°, 0′	7°, 0′	8°, 0′	9°, 0′	10°, 0′
η'.	5°, 57′	6°, 55′	8°, 53′	9°, 51′	10°, 48′
v'.	0,008006	0,008007	0,008009	0,008011	0,008013
p'.	0,000103	0,000104	0,000102	0,000096	0,000086
q'.	1,980598	1,973793	1,966053	1,957349	1,947691

§. 19. Si hos calculos attentius conſideremus, deprehendimus, valores ex formulis differentialibus ſecundis

ddp

$\frac{ddp}{d\theta^2}$ et $\frac{ddq}{d\theta^2}$ oriundos tum demum notabiles euaſiſſe, vbi ſumſimus $\omega = 5^\circ$, quippe qui pro $\omega = 3^\circ$, tam parui prodierunt, vt tuto negligi potuerint. Quam ob rem, ſi interualla non vltra $\omega = 3^\circ$ conſtituere velimus, formulas differentiales ſecundi gradus ſine errore praetermittere licebit; vnde totus calculus mirifice contrahetur. Nam quoniam inueſtigatio iſtarum formularum haud parum prolixum calculum poſtulat, hoc modo labor magnopere ſubleuabitur; quamquam enim tum numerus epocharum multiplicari debet, tamen totum negotium multo minori opera confici poterit.

§. 20. Quodſi ergo pro initio cuiuspiam epochae habeantur primo anguli θ et Φ, vnde prodit $\eta = \Phi - \theta$, vna cum quantitatibus v, p et q, inde ſtatim colligantur valores:

$$\frac{dp}{dv} = qqv - \frac{m}{vv} + \frac{1}{2}v(1 + 3\,\text{coſ.}\,2\eta) \text{ et}$$
$$\frac{dq}{d\theta} = -\frac{2pq}{v} - \frac{3}{2}\,\text{ſin.}\,2\eta,$$

quibus inuentis erit pro ſequente epocha, vbi $\theta' = \theta + \omega$.

1°. $\Phi' = \Phi + \omega(q + \frac{1}{2}\omega\frac{dq}{d\theta})$;

2°. $v' = v + \omega p + \frac{1}{2}\omega^2 . \frac{dp}{d\theta}$;

3°. $p' = p + \omega\frac{dp}{d\theta}$ et

4°. $q' = q + \omega\frac{dq}{d\theta}$;

vnde ſi ſtatim ſtatuamus $\omega = 3^\circ$, erit pro euolutione harum formularum:

$$l\omega = 8,718966 \text{ et } l\omega^2 = 7,437932,$$

vnde calculum vt ſupra pro epocha ſequente $\theta = 10^\circ$ expediamus.

Epocha tertia.

qua $\theta = 10^\circ$.

§. 21. Hic ergo ex iam inuentis erit

$\Phi = 19^\circ, 48'$	$v = 0,008013$	$lv = 7,903795$
$\theta = 10^\circ, 0'$	$p = 0,000086$	$lp = 5,934498$
$\eta = 9^\circ, 48'$	$q = 1,947691$	$lq = 0,2[illegible]9520$
$2\eta = 19^\circ, 36'$		

Hinc iam calculos in extenſo hic apponamus:

Pro $\frac{dp}{d\theta}$.	Pro $\frac{dq}{d\theta}$.
$lqq = 0,579[illegible]40$	$lp = 5,934498$
$lv = 7,903795$	$lq = 0,289520$
$lqqv = 8,482835$	$lpq = 6,224018$
I. $qqv = 0,030397$	$lv = 7,903795$
$lm = 4,477121$	
$lvv = 5,807590$	$l\frac{pq}{v} = 8,320223$
$l\frac{m}{vv} = 8,669531$	$\frac{pq}{v} = 0,020903$
II. $\frac{m}{vv} = 0,046723$	I. $\frac{2pq}{v} = 0,041806$
III. $\frac{1}{2}v = 0,004006$	II. $\frac{3}{2}$ ſin. $2\eta = 0,503177$
$l\frac{3}{2} = 0,176091$	hinc $\frac{dq}{d\theta} = -0,544983$
$lv = 7,903795$	$l\frac{dq}{d\theta} = (-)\,9,736383$
$l\frac{3}{2}v = 8,079886$	$l\omega = 8,718966$
l coſ. $2\eta = 9,974077$	
$l\frac{3}{2}v$ coſ. $2\eta = 8,053963$	$l\frac{\omega dq}{d\theta} = (-)\,8,455349$
IV. $\frac{3}{2}v$ coſ. $2\eta = 0,011323$	ergo $\frac{\omega dq}{d\theta} = -0,028533$
Hinc ſequitur	Cum nunc ob $\omega = 3$ ſit

dp

$\frac{dp}{d\theta} = -0,000997$	$\Phi' = 19^\circ, 48' + 3\,(q + \frac{1}{2}\omega.\frac{dq}{d\theta})$
$l\frac{dp}{d\theta} = (-)\,6,998695$	erit
$l\omega = 8,718966$	$\Phi' = 25^\circ, 36'$.
	Deinde reperitur
$l\omega^2 = 7,437932$	$q' = 1,919158$.
$l\frac{\omega dp}{d\theta} = (-)\,5,717661$	Praeterea erit
$l\frac{\omega^2 dp}{d\theta} = (-)\,4,436627$	$v' = 0,008016$ et
ergo $\frac{\omega dp}{d\theta} = -0,0000522$	$p' = 0,000034$
$\frac{\omega^2 dp}{d\theta} = -0,0000027$	

Quocirca in fine huius epochae, pro quo eſt $\theta = 13^\circ$ reliqua elementa ita ſe habent:

$\Phi' = 25^\circ, 36'$	$p' = 0,000034$
$v' = 0,008016$	$q' = 1,919158$.

Quarta epocha.

vbi $\theta = 13^\circ$.

§. 22. Elementa pro initio huius epochae ita ſe habebunt:

$\Phi = 25^\circ, 36'$	$v = 0,008016$	$l\,v = 7,903957$
$\theta = 13^\circ, 0'$	$p = 0,000034$	$l\,p = 5,531479$
$\eta = 12^\circ, 36'$	$q = 1,191958$	$l\,q = 0,283110$
$2\eta = 25^\circ, 12'$		

Hinc iam calculus, vt ſupra factum eſt, euoluatur, iterumque ſumatur $\omega = 3^\circ$, et valores pro fine huius epochae $\theta = 16^\circ$, ita ſe habebunt:

$\Phi' = 31^\circ, 18'$	$p' = -0,000085$
$v' = 0,008015$	$q' = 1,884868$.

Quinta

Quinta epocha.

vbi $\theta = 16^\circ$.

§. 23. Elementa pro initio huius epochae ſunt ſequentia:

$\Phi = 31^\circ, 18'$	$v = 0,008015$	$lv = 7,903903$
$\theta = 16^\circ, 0'$	$p = -0,000085$	$lp = (-)\,5,929419$
$\eta = 15^\circ, 18'$	$q = 1,88486$	$lq = 0,275281$
$2\eta = 30^\circ, 36'$		

Hinc iam pro fine huius epochae ſequentes prodierunt valores:

$\Phi' = 36^\circ, 53'$	$p' = -0,000287$
$v' = 0,008006$	$q' = 1,846984.$

Sexta epocha.

vbi $\theta = 19^\circ$.

§. 24. Elementa pro initio huius epochae ita ſe habebant:

$\Phi = 36^\circ, 53'$	$v = 0,008006$	$lv = 7,903415$
$\theta = 19^\circ, 0'$	$p = -0,000287$	$lp = (-)\,6,457882$
$\eta = 17^\circ, 53'$	$q = 1,846984$	$lq = 0,266463$
$2\eta = 35^\circ, 46'$		

Hinc iam pro fine huius epochae valores ita ſe habebunt:

$\Phi' = 42^\circ, 33'$	$p' = -0,000487$
$v' = 0,007993$	$q' = 1,821005$

hocque modo, quousque lubuerit, progredi licebit.

§. 25. Quae hactenus computauimus, in ſequenti tabella coniunctim repraeſentemus, quo facilius progreſſio talis motus perſpici queat, vbi diſtantiam Solis a terra loco unitatis per 1000000 exprimemus.

θ

θ	Φ	η	v	p	q
0°, 0′	0°, 0′	0°, 0′	8000	0	2, 000
1, 0	2, 0	1, 0	8000	19	1, 999
2, 0	3, 59	1, 59	8000	39	1, 997
3, 0	5, 59	2, 59	8001	59	1, 995
4, 0	7, 59	2, 59	8003	78	1, 991
5, 0	9, 58	4, 58	8004	98	1, 986
6, 0	11, 57	5, 57	8006	103	1, 980
7, 0	13, 55	6, 55	8007	104	1, 974
8, 0	15, 53	7, 53	8009	102	1, 966
9, 0	17, 51	8, 51	8011	96	1, 957
10, 0	19, 48	9, 49	8013	86	1, 948
11, 0	21, 44	10, 44	8014	69	1, 938
12, 0	23, 40	11, 40	8015	51	1, 928
13, 0	25, 36	12, 36	8016	34	1, 919
14, 0	27, 30	13, 27	8016	— 5	1, 907
15, 0	29, 25	14, 25	8016	— 45	1, 896
16, 0	31, 18	15, 18	8015	— 85	1, 884
17, 0	33, 10	16, 10	8014	— 152	1, 872
18, 0	35, 2	17, 2	8010	— 220	1, 859
19, 0	36, 53	17, 53	8006	— 287	1, 847
20, 0	38, 43	18, 43	8006	— 387	1, 834
21, 0	40, 33	19, 33	7993	— 487	1, 821
22, 0	42, 22	20, 22	7983	— 588	1, 808
23, 0	44, 10	21, 10	7972	— 726	1, 795
24, 0	45, 57	21, 57	7959	— 864	1, 783
25, 0	47, 44	22, 44	7942	— 1002	1, 770
26, 0	49, 30	23, 30	7924	— 1184	1, 759
27, 0	51, 15	24, 15	7901	— 1366	1, 749
28, 0	52, 59	24, 59	7876	— 1549	1, 738
29, 0	54, 43	25, 43	7847	— 1776	1, 730
30, 0	56, 26	26, 26	7815	— 2003	1, 722

 Hunc

Hunc calculum tantum ſpeciminis loco hic appoſuimus. Optandum autem foret, vt quis laborem ſuſciperet, hanc ſeriem maiori cura multo longius vsque ad integram reuolutionem, atque adeo duas pluresue proſequendi, tum enim facilius iudicari poterit, vtrum certus ordo in progreſſione horum numerorum detegi queat, nec ne.

§. 23. Quanquam in hoc exemplo diſtantia v ab initio creſcere incepit, tamen mox maximum valorem aſſequitur, a quo deinceps iterum decreſcit; ſicque nullum eſt dubium, quin tale corpus totum ſuum motum intra ſphaeram lunarem ſit peracturum. Sin autem hoc corpus ab initio in I oblique fuiſſet proiectum, tum euidens eſt, id mox e ſphaera lunari egreſſurum et in regionem planetarum primariorum tranſiturum fuiſſe; hoc igitur modo tandem ad tantam diſtantiam a terra remouebitur, vt ea non amplius reſpectu diſtantiae Solis tanquam infinite parua ſpectari queat, vnde etiam eius diſtantia a Sole quam poſuimus $= u = (1 - 2 v \text{ coſ. } 2 \eta)$ non amplius per formulam $1 + v \text{ coſ. } \eta$, exprimi poterit, ſed ad plures terminos progredi oportebit. Quin etiam fieri poterit, vt hoc corpus ad tantam diſtantiam a Terra recedat, vt iſta formula non amplius per ſeriem conuergentem exhiberi queat, ſicque neceſſe erit ipſam litteram ω in calculo retinere, id quod ſemper continget, quando corpus motum ſuum extra ſphaeram lunarem abſoluit. Quemadmodum igitur his caſibus motum proſequi conueniat, in ſequenti problemate doceamus.

Proble-

Problema.

Si daretur corpus coeleſte, quod non procul extra ſphaeram lunarem fuiſſet proiectum, eius motum continuo proſequendo inueſtigare.

Solutio.

§. 24. Cum igitur tale corpus non amplius tanquam ſatelles Terrae conſiderari poſſet, eius motum potius ad Solem referri conueniet. Conſtituto igitur centro Solis in puncto fixo S, aſſumamus iterum Terram circa Solem motu vniformi in circulo AT reuolui, cuius radium $SA = ST$ vnitate deſignemus, atque hic iterum angulum $AST = \theta$, quem quouis tempore deſcripſerit, vt ante pro menſura temporis accipiamus, maneatque pariter vt ante maſſa Solis $= 1$, cuius reſpectu vocetur maſſa Terrae $= m$, ſicque hoc caſu in formulis ſupra datis has duas maſſas 1 et m inter ſe permutari oportebit. Tab. XI. Fig. 2.

§. 25 Ponamus nunc, dum Terra egrediebatur ex puncto A, corpus quodpiam coeleſte in I fuiſſe quomodocunque proiectum, ita vt diſtantia SI non multo fuerit minor maiorue quam diſtantia $SA = 1$; vbi tamen aſſumimus, diſtantiam AI maiorem fuiſſe radio ſphaerae lunaris, quem cenſere poſſumus $= \frac{1}{100}$; tum vero, elapſo tempore quo terra angulum $TSA = \theta$ confecerit, iſtud corpus in ipſo plano eclipticae peruenerit in L, voceturque nunc eius diſtantia a Sole $SL = v$, eiusque longitudo ſeu angulus $ASL = \Phi$, ſitque vt ante breuitatis gratia angulus $TSL = \Phi - \theta = \eta$; at vero diſtantiam a Terra vocemus nunc $LT = u$, ita vt ſit $u = \sqrt{(1 - 2v \cos. \eta + vv)}$

vbi cum diſtantia v non multum diſcrepet a diſtantia $= 1$, euolutio huius formulae in ſeriem non amplius locum habere poterit, quippe quae non amplius foret conuergens. Quod quo clarius appareat, haec formula ita repraeſentetur: $u = \sqrt{}(1 + vv)\sqrt{}(1 - \frac{2v\,\text{coſ.}\,\eta}{1 + vv})$, vbi cum coefficiens $\frac{2v}{1 + vv}$ non multum diſcrepet ab 1, notum eſt talem formulam $\sqrt{}(1 \pm n\,\text{coſ.}\,\eta)$, in qua propemodum ſit $n = 1$, nullo modo in eiusmodi ſeriem conuerti poſſe, quae pro omnibus angulis η conuergat.

§. 26. Quoniam igitur hic ipſam quantitatem u in calculo retinere coacti ſumus, formulae §. 7. pro motu determinando ad hunc caſum accommodabuntur, ſi modo ambae maſſae 1 et m inter ſe permutentur. Hinc igitur binae aequationes motum quaeſitum definientes ita ſe habebunt:

$$\text{I}^\circ.\ \frac{(1+m)(ddv - v\,d\Phi^2)}{d\theta^2} = -\frac{1}{vv} - m\,\text{coſ.}\,\eta\left(1 - \frac{1}{u^3}\right) - \frac{mv}{u^3}$$

$$\text{II}^\circ.\ \frac{(1+m)(2\,dv\,d\Phi + v\,dd\Phi)}{d\theta^2} = m\,\text{ſin.}\,\eta\left(1 - \frac{1}{u^3}\right)$$

vbi cum ſit $m = \frac{1}{\ldots\ldots}$, loco $1 + m$, tuto ſcribi poterit 1. Verum vt hae formulae etiam valere queant, ſi loco terrae ſubſtituatur alius planeta primarius, veluti Iupiter, cuius maſſa multo eſt maior, retinebimus multiplicatorem $(1 + m)$. Calculus enim perpetuo eodem modo inſtitui debebit pro quouis alio planeta loco terrae aſſumto, ſi modo eius motum tanquam circularem et vniformem ſpectare velimus.

§. 27. Quodſi iam motum corporis L per interualla ſatis exigua, vt ante fecimus, proſequi velimus, pro eius

eius loco quocunque L quantitates v et Φ cum angulo θ pro cognitis habebimus, vnde ſimul erit $\eta = \Phi - \theta$. Praeterea vero, quia etiam motum corporis in L vt cognitum ſpectamus, ſtatuamus vt ante $\frac{dv}{d\theta} = p$; et $\frac{d\Phi}{d\theta} = q$, vnde erit $\frac{d\eta}{d\theta} = q - 1$, quibus poſitis ambae noſtrae aequationes erunt.

$$\text{I}^\circ.\ (1+m)\left(\frac{dp}{d\theta} - vqq\right) = -\frac{1}{vv} - m\,\text{coſ.}\,\eta\left(1 - \frac{1}{u^3}\right) - \frac{mv}{u^3} \text{ et}$$

$$\text{II}^\circ.\ (1+m)\left(2pq + \frac{v\,dq}{d\theta}\right) = m\,\text{ſin.}\,\eta\left(1 - \frac{1}{u^3}\right),$$

vnde valores binarum formularum differentialium $\frac{dp}{d\theta}$ et $\frac{dq}{d\theta}$ definiri poterunt.

§. 28. His autem valoribus inuentis, quoniam praeſens tempus per angulum θ exprimimus, poſtquam hinc elapſum fuerit tempus $= \omega$, pro tempore $\theta + \omega$ valores eorundem elementorum, quos per v', θ', Φ', p' et q' deſignemus, ſequenti modo determinabuntur

$$\theta' = \theta + \omega$$

$$\Phi' = \Phi + \omega q + \tfrac{1}{2}\omega^2 . \frac{dq}{d\theta},$$

$\eta' = \Phi' - \theta'$. Simili modo erit

$v' = v + \omega p + \frac{1}{2}\omega^2 \frac{dp}{d\theta}$; ac denique etiam

$$p' = p\frac{\omega\,dp}{d\theta} \text{ et } q' = q + \frac{\omega\,dq}{d\theta}$$

ſi modo interuallum ω non nimis magnum accipiatur, cuius limitem quouis caſu facile diiudicare licebit, quem vt vidimus plerumque vsque ad 3° augere licebit. Imprimis autem hinc neceſſe erit valorem u' colligere, quippe

ſe qui ſequente interuallo erit

$$u' = \sqrt{(1 - 2v' \operatorname{coſ.} \eta' + v'v')},$$

quibus obſeruatis motum talis corporis quousque lubuerit proſequi licebit; calculus autem ob formulam irrationalem u aliquanto moleſtior euadet quam ſupra. Facile autem intelligitur, hinc motus maxime intricatos reſultare poſſe, quos nullo plane modo adhuc cognito ſaltem vero proxime ad ordinem quendam reuocare licebit.

RECHERCHES SUR LA NOUVELLE PLANÈTE, DÉCOUVERTE PAR MR. *HERSCHEL* ET NOMMÉ *GEORGIUM* SIDUS.

par

A. J. LEXELL.

§. 1.

En réfléchiſſant ſur les progrès conſiderables qu'a fait l'Aſtronomie pendant ce dernier ſiecle, tant par rapport à la Théorie du mouvement des corps céleſtes, que rélativement à la perfection des Inſtruments dont les Aſtronomes ſe ſervent pour faire leurs obſervations, & la grande ſcrupuloſité qu'on met dans l'art d'obſerver; il étoit à peine à ſuppoſer qu'il manquât encore aux Aſtronomes la connoiſſance de quelques uns des aſtres qui principalement conſtituent notre ſyſtême Planètaire, ou qu'il reſtât à découvrir quelque nouvelle Planète. Comme il y a déja presque vingt deux ſiecles de paſſés depuis qu' Eudoxe célebre Philoſophe Grec apporta d'Egypte la connoiſance des cinq Planètes principales du Syſtême Solaire; il eſt certainement très ſurprenant, que pendant un ſi long eſpace

ſpace de temps, quelque Planète ait pû échapper aux ſoins attentifs des Aſtronomes. Cependant ſi l'on conſidere que les cinq Planètes principales découvertes par les Egyptiens & Chaldeens, ne ſont pas plus eloignees du Soleil, qu'elles ne ſe préſentent à la vue ſimple, & qu'elles ſe font d'ailleurs aiſément diſtinguer des etoiles fixes par leur grandeur apparente & par leur lumiere; on doit preſumer que s'il exiſte des Planètes dont la diſtance du Soleil ſurpaſſe celle du Saturne deux ou pluſieurs fois, elles ne peuvent qu'avoir une lumiere bien foible, un Diametre fort petit & un mouvement extremement lent, en ſorte que leur decouverte doit avoir incomparablement plus de difficulte, que celle des cinq Planètes connues jusqu'ici.

§. 2. C'eſt donc par un bonheur extremement rare & inattendu, que Mr. *Herſchel* célebre par ſes nouvelles decouvertes Optiques & Aſtronomiques, a réuſſi à decouvrir au mois de Mars de l'Annee 1781, dans la conſtellation des Jumeaux une nouvelle étoile à la quelle il remarquoit un mouvement propre très ſenſible & dont toutes les apparences ſembloient indiquer, qu'elle méritoit d'etre comptée parmi les Planètes. Car les Comètes etant environnees d'une nebuloſite, on ne remarque rien de pareil a cette nouvelle étoile, au contraire elle eſt très bien terminee, & quelque petite qu'elle ſoit, on obſerve pourtant que ſa lumiere differe aſſez de celle des etoiles fixes. D'ailleurs le peu de changement qu'on obſerve dans ſa Latitude, (par quoi il eſt aiſé de prouver, que l'inclinaiſon de ſon orbite à l'Ecliptique eſt fort petite) & ſon mouvement qui ſe fait ſelon les ordres des ſignes, comme celui des autres Planètes, ſont autant d'indications

pour

pour ranger cet Aſtre nouveau parmi les Planètes principales du Syſtême Solaire. C'eſt auſſi par ces raiſons, qu'auſſi-tôt que Mr. *Herſchel* eut fait part de cette importante découverte à la Societé Royale des Sciences de Londres, le Docteur *Maskelyne* & les autres Aſtronomes Anglois qui avoient obſervé la nouvelle étoile, paroiſſoient perſuadés, qu'elle pourroit bien être une nouvelle Planète. Cependant comme les apparences ne ſont pas aſſez déciſives pour former une concluſion ſûre & infaillible ſur cette queſtion, il reſtoit encore à examiner, ſi le mouvement de cette nouvelle étoile pourroit être expliqué par une orbite fort peu Elliptique ou presque circulaire.

§. 3. Depuis que pluſieurs Aſtronomes ſe ſont occupés de ce ſujet & qu'ils ont même publié le réſultat de leur recherches; j'eſpere qu'il me ſera d'autant plus permis de donner un Expoſé des calculs que j'ai faits ſur cette matiere, que je ſuis certainement le premier, qui ait eſſayé de calculer le mouvement de cet Aſtre dans une orbite circulaire, comme je pourrois le prouver par le temoignage de pluſieurs Aſtronomes Anglois & François. Mais avant que de détailler le réſultat des calculs, que j'ai faits ſur cette étoile pendant mon ſejour à Londres, d'après les obſervations que Mr. *Maskelyne* a eu la bonté de me communiquer, & qui ont été faites pendant la premiere apparition depuis le 17 de Mars jusqu'au 28 de Mai 1781; j'indiquerai en peu de mots les tentatives que quelques Aſtronomes & Mathématiciens de l'Académie de Sciences de Paris, ont faites pour expliquer le mouvement de cette Planète par une orbite Parabolique.

Dans une lettre de Mr. *Meſſier* à Mr. *Maſkelyne* du mois de Mai ou Juin 1781 il etoit marqué, que Mr. *Méchain* avoit trouvé pour la nouvelle étoile, ces Elémens d'une orbite Parabolique:

Longitude du Noeud 2ˢ. 28°. 39′;
Inclinaiſon de l'orbite 14′;
Lieu du Périhélie 8ˢ. 0°. 19′;
Diſtance du Périhélie 0, 459874;

Paſſage par le Périhélie 1781. 23 Mai à 1ʰ. 32′. temps moyen de Paris.

Ces Elémens m'ayant été communiqués par Mr. *Maſkelyne* je fus curieux de voir comment ils s'accorderoient avec les obſervations; mais je trouvai à ma grande ſurpriſe, qu'il y avoit des obſervations, qui s'en éloignoient, de plus d'un dégré. Et réflechiſſant enſuite un peu ſur cet objet, je remarquai que comme l'inclinaiſon de l'orbite eſt extremement petite, on peut conſidérer cette orbite, comme ſi elle étoit décrite dans le plan même de l'Ecliptique. Or il aiſe de voir, que lorsqu'il s'agit de trouver une ligne Parabolique qui ſatisfaſſe à trois lieux Géocentriques d'un Aſtre, ſitués dans le plan de l'Ecliptique, la nature du Probleme fournira deux ſolutions dont l'une ſera la vraie & ſatisfera à toutes les obſervations, mais l'autre quoiqu'elle rempliſſe les trois obſervations propoſées differera conſidérablement du reſte des obſervations. (*) Et ayant enſuite entrepris moi-même

(*) C'eſt auſſi par cette même raiſon, que la Théorie du mouvement dans une orbite Parabolique calculée par Mr. le Baron *Pacaſſi*, ſe trouve ſi peu d'accord avec les obſervations. Voyez les Ephemerides de Berlin pour l'An 1785. pag. 187.

me la recherche d'une orbite Parabolique pour la nouvelle étoile, je trouvai que dans celle qui ſatisferait aux obſervations faites pendant la premiere apparition, la diſtance Périhélie devroit ſurpaſſer au moins huit fois la diſtance du Soleil à la terre. Ayant communiqué ces réflexions à Mr. *Magellan* qui ſéjournoit alors à Paris, il eut la bonté de communiquer les réſultats de mes calculs à l'Académie des Sciences de Paris. Ils ſervirent à convaincre ceux des Académiciens, qui doutoient des réſultats trouvés par le digne & reſpectable Préſident *de Saron*, lequel en examinant quatre obſervations de ce nouvel Aſtre, avoit trouvé, qu'une orbite Parabolique dont la diſtance Périhélie égale 14 fois celle du Soleil à la terre, ſatisferoit aſſez bien aux obſervations faites durant la premiere apparition. Dans les Elémens du mouvement Parabolique, que Mr. *Jeaurat* a inſerés dans la Connoiſſance de temps pour 1784, d'après les calculs de Mr. *de la Place*, la diſtance Périhélie eſt ſuppoſée 9 fois plus grande que celle du Soleil à la terre. Or d'après les obſervations de la premiere apparition, il étoit auſſi vraiſemblable que la diſtance Périhélie fut ſuppoſée 18 fois, que 9 fois plus grande que celle du Soleil à la terre, comme nous verrons bien-tôt.

§. 4. En faiſant uſage de l'obſervation de la nouvelle étoile faite par Mr. *Herſchel* lui même, l'An 1781 le 17 de Mars à 10^h. 40$'$ Temps moyen de Greenwich & de celle que Mr. *Maſkelyne* a faite à l'Obſervatoire de Greenwich le 11 de Mai à 8^h. 28$'$ du temps moyen, j'ai trouvé qu'une orbite circulaire, dont le rayon eſt égal à 18, 928 fois la diſtance moyenne du Soleil à la terre, ſatisferoit à ces deux obſervations & que la Longitude

 Hé-

Héliocentrique de la nouvelle Planète eſt:

1781 le 17 Mars à 10^h.40$'$ Temps moy. de Gren. 2^s.27$°$.30$'$.27$''$.6
11 Mai 8.28. 2.28. 9.53.4.

Au moyen de ces ſuppoſitions j'ai calculé les lieux de la nouvelle étoile pour les autres moments obſervés à Greenwich, dont les réſultats ſont répréſentés dant la Table qui ſuit:

Temps moy. de Greenv.				Longitude de l'étoile.		
1781.				obſervée.	calculée.	Differ.
Mars	17.	10^h.	40$'$.	2^s.24$°$.29$'$.46$''$.	2^s.24$°$.29$'$.46$''$	
Avril	1.	9.	58.	- 24. 49. 30.	- 24. 47. 59.	− 1$'$. 31$''$.
	9.	10.	41.	- 25. 3. 19.	- 25. 2. 1.	− 1. 18.
	18.	8.	0.	- 25. 22. 14.	- 25. 21. 27.	− 47.
May	2.	8.	30.	- 25. 58. 36.	- 25. 57. 48.	− 48.
	11.	8.	28.	- 26. 24. 32.	- 26. 24. 32.	
	28.	9.	2.	- 27. 19. 59.	- 27. 20. 37.	+ 38.

Quoique cette orbite circulaire ne diffère pas trop conſidérablement des obſervations faites pendant l'intervalle de temps entre le 17 de Mars & le 28 de Mai; cependant comme l'angle que l'aſtre a décrit autour du Soleil entre les deux obſervations employées dans le calcul, n'eſt que de 39$'$, 26$''$ à peu près, il eſt aiſé de voir que de petits changements dans l'une ou l'autre obſervation pourroient un peu changer l'orbite circulaire en queſtion.

§. 5. Le mouvement de la nouvelle étoile étant extrêmement lent, puisque dans l'hypothèſe de l'orbite circulaire, il ne fait que 4°. 20$'$ à peu près par an, j'ai bientôt conçu que pour les obſervations faites pendant la premiere apparition, c'eſt à dire depuis le 17 de Mars jus-

jusqu'au 28 de Mai, on pourroit trouver des orbites Paraboliques qui ſatisferoient à ces obſervations, & que même la détermination de ces orbites admettroit une très grande Latitude. Et ce ſentiment s'eſt trouvé enſuite vérifié par les calculs qui m'ont convaincu que pour ſatisfaire aux obſervations du 17 de Mars & 28 de Mai, on peut employer des orbites Paraboliques, dont les diſtances Perihélies varient depuis 6 à 8 fois la diſtance du Soleil à la terre, jusqu'à 20 à 22 fois, ſans qu'il en réſulte des erreurs trôp groſſières dans les obſervations intermédiaires. On a moyen de s'en convaincre par la Table qui donne le réſultat de mes calculs dans l'Hypothèſe de l'orbite Parabolique:

Elémens de l'orbite.

Diſtance Périhelie.	Lieu du Périhélie	Temps du Périhélie compté de Mars 1781.
6.	$6^s. 17^\circ. 9'. 45''$	$2867^j, 9606$
8.	6. 5. 34. 8	3101, 7468
10.	5. 24. 43. 15	3244, 4691
12.	5. 14. 5. 55	3283, 6554
14.	5. 3. 16. 34	3200, 5067
16.	4. 21. 43. 53	2960, 6933

Longitude de l'Aſtre.

Temps moyen de Greenwich 1781.

Diſt. Périh.	Avril 1 $9^h. 58'$	Avr. 18. $8^h. 0'$	May 22. $9^h. 6'$
6.	$2^s. 24^\circ. 46'. 32''$	$2^s. 25^\circ. 19'. 29''$	$2^s. 26^\circ. 59'. 1''$
8.	- - 47. 8	- - 20. 0	- - 59. 15
10.	- - 47. 36	- - 20. 43	- - 59. 23
12.	- - 48. 5	- - 21. 20	- - 59. 37
14.	- - 48. 27	- - 21. 50	- - 59. 47
16.	- - 48. 50	- - 22. 20	- - 59. 53
obſervée	- - 49. 30	- - 22. 14	- - 59. 50

Il eſt donc prouvé par ces recherches que pour ſatisfaire aux obſervations faites pendant la premiere apparition, on peut trouver une infinité d'orbites, ce qui doit d'autant moins paroître ſingulier, que l'angle décrit par l'Aſtre autour du Soleil n'eſt que de 51′ à peu près. Quoiqu'il en ſoit, même ces premières obſervations ſervent à établir un élément fort eſſentiel du mouvement de la nouvelle Planète, ſavoir ſa diſtance actuelle au Soleil; car quelle que ſoit l'eſpece de ſon orbite, on ne ſauroit douter, que ſa diſtance au Soleil n'égale à peu près 19 fois la diſtance moyenne du Soleil à la terre.

§. 6. Ayant reçu après mon retour à Pétersbourg pluſieurs obſervations de la nouvelle Planète, faites vers la fin de l'An 1781 & au commencement de l'An 1782 à Paris, Milan, Toulouſe, Stockholm etc; je croyois que ces obſervations me fourniroient un moyen très propre à déterminer l'orbite circulaire plus exactement, que je n'avois fait & qu'elles ſerviroient même à examiner ſi une Parabolique ſatisfait aux obſervations ou non? Pour l'orbite circulaire je commençai d'abord mes recherches par la combinaiſon de l'obſervation de Mr. *Herſchel* du 17 de Mars 1781 avec celle, qui a été faite à Milan par Mr. *Oriani* le 22 d'Octobre de la même année. Ces deux obſervations m'ont fourni une orbite circulaire dont le rayon eſt égal à 18,91724 fois la diſtance moyenne du Soleil à la terre & les Longitudes Heliocentriques déduites de là ſont:

1781 le 17 Mars à $10^h.40'$ Tems moy. de Greenv.		$2^s.27°.30'.37'',7$
22 d'Oct. 17.27.		$3.\ 0.\ 8.\ 14,4$

Afin qu'on puiſſe juger de l'exactitude de ces Elémens, il

il eſt bon de répréſenter comment les lieux calculés de la nouvelle Planète, s'accordent avec les obſervés.

Temps moyen de Greenv. 1781.					Longitude de la Planète calculée.				obſerv.
Mars	17.	10ʰ.	40'.	0''.	2ˢ.	24°.	29'.	46''.	+ 0''.
Avril	1.	9.	58.	0.	-	24.	48.	6.	+ 1'. 24.
	9.	10.	41.	0.	-	25.	2.	26.	+ 53.
	18.	8.	0.	0.	-	25.	22.	14.	+ 0.
Mai	2.	8.	30.	0.	-	25.	57.	58.	+ 38.
	11.	8.	28.	0.	-	26.	24.	40.	− 8.
	22.	9.	6.	0.	-	27.	0.	12.	− 22.
Juill.	19.	15.	10.	36.	3.	0.	24.	22.	− 11.
	29.	15.	26.	55.	-	0.	56.	2.	+ 19.
Août.	8.	15.	58.	48.	-	1.	25.	22.	− 13.
	19.	14.	56.	25.	-	1.	53.	34.	− 2.
Sept.	1.	16.	0.	51.	-	2.	20.	58.	+ 14.
	14.	16.	37.	6.	-	2.	40.	45.	+ 8.
	28.	16.	43.	0.	-	2.	52.	32.	+ 12.
Octob.	10.	10.	5.	0.	-	2.	54.	29.	+ 10.
	22.	17.	27.	0.	-	2.	49.	0.	+ 0.
Nov.	4.	8.	24.	25.	-	2.	34.	46.	+ 16.
	14.	8.	35.	15.	-	2.	18.	32.	+ 34.
	20.	7.	26.	28.	-	2.	7.	0.	+ 37.
Decemb.	4.	6.	35.	55.	-	1.	35.	39.	+ 32.
	14.	6.	0.	29.	-	1.	11.	14.	+ 4.
1782. Janv.	1.	7.	37.	32.	-	0.	24.	20	+ 1. 14.
	12.	6.	23.	10.	2.	29.	57.	17.	+ 1. 0.
	23.	5.	40.	25.	-	29.	33.	49.	+ 49.
Fevr.	20.	6.	23.	0.	-	28.	53.	58.	+ 1. 14.
	27.	9.	55.	11.	-	28.	49.	56.	+ 1. 7.

clu-

Comme preſque tous les lieux calculés d'après ces Elémens, ſe trouvent en défaut, depuis l'obſervation du 28 d'Octobre il en faut conclure, que le rayon de l'orbite circulaire doit encore être un peu diminué. Et en effet ſi l'on compare l'obſervation du 17 de Mars 1781 avec celle du 27 Fevrier 1782, on trouve qu'une orbite circulaire ſatisfait à ces obſervations en prenant le rayon égal à 18, 86425 fois la diſtance moyenne du Soleil à la terre, d'on l'on tire les Longitudes Héliocentriques pour

Temps moy. de Greenv.		
le 17 Mars 1781	à $10^h. 40'$.	$2^s. 27°. 31'. 8'', 2$;
27 Fevr. 1782	9. 55	3. 1. 41. 33'. 1.

D'ailleurs l'obſervation du 17 de Mars étant peut-être ſujette à caution, auſſi bien que celle du 1 d'Avril 1781, j'ai penſé d'y ſubſtituer celle du 9 d'Avril 1781 & moyennant cela, j'ai trouvé que pour ſatisfaire aux obſervations du 9 d'Avril 1781 & 27 Fevrier 1782, on peut employer une orbite circulaire, dont le rayon égale 18, 88612 fois la diſtance moyenne du Soleil à la terre; ce qui fournit les Longitudes Héliocentriques

Tems moy. de Greenv.		
1781 le 9 d'Avril	$10^h. 41'$.	$2^s. 27°. 48'. 17'', 6$;
1782 27 de Fevr.	9. 55.	3. 1. 41. 21, 1.

En fin en faiſant la combinaiſon de l'obſervation du 9 d'Avril, avec celle de Mr. *Wargentin* faite à Stockholm le 21 d'Octob. 1782 à $8^h. 50'. 25''$ Temps moyen de Greenwich, par la quelle il a trouvé la Longitude de la nouvelle Planète $3^s. 7°. 20'. 56''$, on parvient à une orbite circulaire dont le rayon = 18, 8780 fois la diſtance moyenne

enne du Soleil à la terre & par la quelle les Longitudes Héliocentriques ſont déterminées de cette maniere:

Temps moy. de Greenv.	
1781 le 9 d'Avril $10^h. 41'$.	$2^s. 27°. 48' 25'', 2$
1782 21 d'Octob. 8. 50	3. 4. 32. 7, 9

Comme tous ces calculs s'accordent aſſez bien enſemble, il ſeroit ſuperflu d'entreprendre d'autres combinaiſons des obſervations; car comme il eſt prouvé par celles-ci, qu'une orbite circulaire s'accorde à peu de choſe près avec les obſervations, de meme on a raiſon de préſumer que quelque exacte que ſoit une orbite circulaire pour une petite portion de l'orbe de la Planète, elle ne manquera pas de s'en éloigner à meſure qu'on augmente la portion de l'orbite décrite par la Planète. Et même parcequ'en augmentant l'intervalle entre les obſervations, on eſt obligé de diminuer le rayon de l'orbite circulaire; cette diminution ſemble indiquer que l'orbite de la Planète ne ſauroit être exactement circulaire, mais qu'elle a une excentricité ſenſible. Cependant quelle que ſoit cette excentricité, il eſt bien vraiſemblable, que la diſtance moyenne dans la vraie orbite Elliptique décrite par la Planète ne ſurpaſſera pas 19 fois la diſtance moyenne du Soleil à la terre; d'où il faut auſſi conclure, que le temps de la révolution de la Planète autour du Soleil ne ſurpaſſera pas 82 Ans & 10 Mois, comme de l'autre coté il eſt prouvé, qu'il ſera certainement plus grand que 82 Ans & 1 Mois.

§. 7. Quoi qu'il ſoit donc conſtaté, auſſi bien par les calculs que j'ai faits que par des recherches faites par pluſieurs autres Aſtronomes, qu'une orbite circulaire eſt

 très

très bien d'accord avec les obſervations, cette preuve affirmative n'eſt pas encore aſſez concluante, pour demontrer que le nouvel Aſtre ne ſauroit ſe mouvoir que dans une orbite à peu près circulaire. Mais pour établir la verité de cette propoſition, il faut commencer par prouver, qu'une orbite Parabolique ne ſatisfait pas aux obſervations & enſuite que même des orbites Elliptiques ne ſauroient être ſatisfaiſantes, à moins qu'elles n'ayent une excentricite très peu conſiderable. Pour vérifier la premiere partie de cette discuſſion, j'ai cherché des orbites Paraboliques, qui ſatisfiſſent aux obſervations faites le 17 de Mars 1781 et le 23 de Janv. 1782, dont la derniere a été faite à Stockholm par Mr. *Wargentin*. En faiſant pluſieurs ſuppoſitions pour la diſtance Perihelie, j'ai trouvé les autres Elemens tels, que je les ai repréſentes dans cette Table:

Diſt. Périh.	Lieu du Périhél.	Temps du Périh. compte de Mars 1781
10	$5^s.25^o.41'.3''$	3329^j, 5577
14	5. 6. 56. 49	3501, 3152
16	4. 27. 18. 44	3140, 4724
18	4. 16. 53. 48	3403, 9470

Enſuite j'ai examiné quels ſont les lieux calculés d'après ces Elémens, correſpondants aux obſervations faites le 28 de Mai 1781 & le 22 d'Octobre de la même Annee.

Temps

Temps moy. de Greenv. 1781.

	28 Mai 9^h. 2′	22 Oct. 17^h. 47′
Longit. obſerv.	2^s. 27°. 19′. 59″	3^s. 2°. 49′. 0″
Diſt. Perih.	Differ. entre le calcul & l'obſerv.	
10	− 3′. 33″	+ 1. 31
14	− 9. 22	− 20. 49
16	− 11. 41	− 28. 37
18	− 13. 17	− 35. 44

Le réſultat de cette recherche eſt, que pour une diſtance Périhélie 10 fois plus grande que celle du Soleil à la terre, la Longitude obſervée le 28 de Maii 1781 ſurpaſſe la calculée de 3′. 33″ & que ſi on augmente la diſtance Périhélie cette différence ira auſſi en augmentant. Mais pour l'obſervation du 22 d'Octobre la Longitude obſervée differe de la calculée de 1′. 31″ & ſi l'on augmente la diſtance Périhélie cette différence ſera diminuée & même bientôt la Longitude obſervée ſurpaſſera la calculée. Il faut donc en conclure, que ſi on vouloit rendre l'obſervation du 22 d'Octobre tout à fait d'accord avec le calcul, il faudroit qu'on augmentât un peu la diſtance Périhélie, mais en revange on augmentera en même temps l'erreur pour l'obſervation du 28 de Mai; & au contraire ſi l'on tâchoit de diminuer l'erreur de l'obſervation du 28 de Mai, ce qui ne peut ſe faire, ſans diminuer la diſtance Périhélie, l'erreur de l'obſervation du 22 d'Octobre en ſera conſidérablement augmentée. Il eſt donc certain que quelques Elémens d'une orbite Parabolique qu'on choiſiſſe, on ne ſauroit éviter pour les obſervations faites depuis le 17 de Mars 1781 jusqu'au 23 Janvier 1782

Rr 2 des

des erreurs de trois Minutes & comme il n'eſt pas vraiſemblable que de telles erreurs ſoient commiſes dans les obſervations, ſurtout lorsqu'on en trouve pour pluſieurs jours conſecutifs; il eſt ce me ſemble évidemment prouvé, qu'une orbite Parabolique ne ſatisfait en aucune maniere aux obſervations. Afin que nos Lecteurs ſoient en état de juger du degré d'exactitude des Elemens Paraboliques pour la diſtance Périhélie 10, il vaudra la peine d'expoſer les lieux calculés d'après ces Elémens pour quelques obſervations faites depuis le 17 Mars 1781, jusqu'au 27 Fevr. 1782.

Temps moy. de Greenv.			Longitude de la Planète obſervée	calculée
1781	Mars	17. 10^h.40$'$	2^s. 24°. 29$'$. 46$''$	2^s. 24°. 29$'$. 46$''$
	Mai	28. 9. 2	27. 19. 59	27. 16. 26
	Jul.	19. 15. 11	3. 0. 24. 11	3. 0. 21. 5
	Sept.	1. 16. 1	2. 21. 12	2. 19. 8
	Octob.	22. 17. 27	2. 49. 0	2. 50. 31
	Dec.	14. 6. 0	1. 11. 8	1. 14. 1
1782	Janv.	1. 7. 37	0. 25. 34	0. 27. 16
		23. 5. 40	2. 29. 34. 29	2. 29. 34. 29
	Febr.	27. 9. 55	28. 51. 3	28. 49. 39

§. 8. Pour achever notre démonſtration, il ne nous reſteroit donc qu'à prouver, que des orbites Elliptiques, dont l'Excentricité eſt un peu remarquable ne ſauroient ſatisfaire au mouvement de la nouvelle Planète; mais comme pour celle des orbites Paraboliques, qui approche le plus des obſervations, on ne trouve que des erreurs de trois Minutes, de même on peut s'imaginer, que

que pour les orbites Elliptiques les erreurs deviendroient encore plus petites & que par cette raiſon il faut des obſervations de quelques années pour déterminer la vraie quantité de l'excentricité. Tout ce qu'on peut faire en attendant, c'eſt d'exclure ſucceſſivement pluſieurs ſortes d'Ellipſes & en continuant ce travail on ne manquera pas à la fin, de trouver la vraie & celle qui ſeule remplit les obſervations. Cependant on trouveroit moyen d'abreger cette diſcuſſion très conſidérablement, en faiſant uſage de la très importante remarque de Mr. *Bode* célebre Aſtronome de Berlin, le quel en ſe donnant là peine d'examiner pluſieurs étoiles fixes du Zodiaque marquées dans les Catalogues, remarqua qu'une de celles que le célebre Mr. *Mayer* de Göttingue avoit obſervées l'an 1756 dans le ſigne des poiſſons, ne ſe trouvoit plus à la place où *Mayer* l'avoit vue. En tenant compte des Elémens de la nouvelle Planète, il paroît en verité bien vraiſemblable, qu'elle ſe ſoit trouvée le 25 de Sept. 1756 à l'endroit où *Mayer* a obſervé cette étoile, qui ne ſe trouvoit pas dans les Catalogues de *Flamſteed*, ou d'autres alors connus; au moins la différence qu'il y a entre le calcul & l'obſervation, peut être expliquée en partie par l'incertitude ſur la diſtance moyenne & en partie auſſi per l'équation du centre inconue. Cette obſervation ſervira donc aux Aſtronomes pour faciliter leurs récherches ſur cette Planète, & on peut ſe flatter que l'excentricité ne manquera pas d'en être determinée aſſez exactement, vû que le lieu de la Planéte pour cette obſervation eſt éloigné du lieu pour l'obſervation faite le 17 de Mars 1781, de plus de 100°.

§. 9. J'ai toujours ſuppoſé dans mes recherches ſur l'orbite de ce nouvel Aſtre, qu'elle eſt decrite dans le plan de l'Ecliptique, croyant inutile de pouſſer l'exactitude plus loin, vû que l'inclinaiſon de l'orbite eſt extrémement petite. Cependant la Longitude du Noeud & l'inclinaiſon de l'orbite étant des Elemens très importants dans la Théorie du mouvement des Aſtres; il me ſera permis d'obſerver, que faiſant pluſieurs combinaiſons des obſervations & prenant une quantité moyenne entre tous les réſultats, qui en ont été deduits, j'ai trouvé la Longitude du Noeud $2^s. 12^\circ. 50'. 15''$ & l'inclinaiſon de l'orbite $46'. 35''$. Mais-comme dans ces déterminations il y a pour les expreſſions de la Longitude du Noeud des differences d'un degré & 28 Minutes & pour celles de l'inclinaiſon de l'orbite des differences de $4'. 28''$; les valeurs trouvées pour ces Elémens pourroient bien admettre des corrections fort ſenſibles. Un des moyens les plus ſûrs pour déterminer ces Elémens avec plus d'exactitude ſera de n'employer pour cet uſage, que des obſervations faites dans les oppoſitions de la Planète, au moins on gagnera par ce moyen cet avantage, qu'il n'y aura presque aucune incertitude à craindre par rapport aux Longitudes Heliocentriques, qui donnent l'angle décrit autour du Soleil entre les deux obſervations.

Les obſervations dont nous avons fait uſage pour déterminer la Longitude du Noeud & l'inclinaiſon de l'orbite, ſont celles-ci:

Temp.

Temp. moy. de Greenv.					Longitude.				Latitude.	
1781	Mars	17.	10^h.	$40'$	2^s.	$24°$.	$29'$.	$46''$	$11'$.	$48''$,4
	Avril	9.	10.	41		25.	3.	19	11.	55, 3
	Octob.	22.	17.	27	3.	2.	49.	0	14.	16, 0
1782	Janv.	23.	5.	40	2.	29.	34.	29	15.	22, 4
	Fevr.	20.	6.	23	2.	28.	55.	12	15.	17, 3
		21.	6.	20		28.	54.	26	15.	16, 2
	Mars	16.	6.	17		28.	52.	20	15.	11, 0
	Juil.	23.	14.	58	3.	4.	49.	37	15.	23, 0
	Aout	17.	13.	33		6.	4.	11	16.	10
	Octob.	2.	10.	13		7.	19.	58	17.	10
		13.	8.	48		7.	23.	27	17	37
		21.	8.	50		7.	20.	56	17.	44

De là on a tiré ces concluſions:

Obſervat. combinées	Longit. du Noeud				Inclinaiſon de l'orbite	
1781. 17 Mars. 22 Octob.	2^s.	$12°$.	$59'$.	$26''$	$47'$.	$10''$
1782. 23 Janv.		12.	41.	3	46	13
20 Fevr.		12.	26.	53	45.	27
21 Fevr.		12.	22.	33	45.	15
1781. 9 Avril 1782 16 Mars		12.	37.	35	45.	51
23 Juil.		13.	13.	46	44.	12
17 Aout		13.	6.	20	47.	42
2 Octob.		12.	2.	56	47.	18
13 Octob.		13.	31.	38	48.	40
21 Octob.		13.	20.	23	48.	3
Quantité moyenne	2.	12.	50.	15	46.	35

§. 10.

§. 10. Le diamètre de la nouvelle Planète étant extrèmement petit, ce ſeroit en vain que les Aſtronomes tâcheroient de le determiner au moyen des meſures faites par des Micromètres appliqués aux Inſtruments Aſtronomiques: les erreurs qu'on pourroit commettre dans ces obſervations ne manqueroient pas de les rendre infructueuſes. Et ſi quelque Aſtronome en venoit à bout ce ſeroit aſſurement Mr. *Herſchel* lui-même, qui ayant procuré à ſes Teleſcopes une force d'aggrandiſſement, qui ſurpaſſe de beaucoup celle que les meilleurs Inſtruments Aſtronomiques, ſoit Teleſcopes, ſoit Lunettes Dioptriques ont poſſedé jusqu'ici, pourroit auſſi determiner le plus commodement & exactement de fort petites quantités & même jusqu'à des dixiemes parties de ſecondes. Cependant les eſſais qu'il a faits à l'egard de la nouvelle Planète, n'ont pas trop bien reuſſi, car ayant trouvé le 17 de Mars 1781 que le Diamètre etoit à peu près $3''$, il croit l'avoir trouvé le 15 d'Avril de $5\frac{1}{2}''$ environ. Mais ſi l'on fait attention à la très grande diſtance de cette Planète à la terre, on conçoit aiſement qu'un ſi grand changement dans le Diamètre ne ſauroit être admiſſible. Je ſoupçonnerois donc que la difference dans ces meſures, vient de ce que Mr. *Herſchel* employoit pour la derniere obſervation un oculaire beaucoup plus fort, que pour la premiere. Mr. *Maskelyne* ayant examiné cette Planète avec un Teleſcope de ſix pieds, qui eſt à l'obſervatoire de Greenwich evaluoit le Diamètre à $3''$. Les Aſtronomes de Milan l'eſtiment de $6''$ à $7''$ et Mr. *Mayer* de Manheim croit le pouvoir evaluer à $10''$. Les ſentiments des Aſtronomes etant donc ſi peu d'accord entre eux par rapport à ce ſujet, j'ai cru que pour fixer mon

mon jugement, le meilleur expedient ſeroit de comparer la nouvelle Planète, avec quelque autre dont le Diamètre ſoit connu. Et comme il arrivoit que la Planète ſe trouvoit l'année paſſée au mois d'Avril et Mai, dans le voiſinage de Mars, j'ai examiné lequel des deux Aſtres paroitroit le plus grand & j'ai trouvé que le Diamètre de Mars ſurpaſſoit conſidérablement celui de notre Planète. Or Mars étant dans ce temps-là dans les environs de ſon Apogée, ſon Diamètre ne ſurpaſſoit pas 5″; d'où je conclus que le Diamètre de la nouvelle Planète eſt certainement plus petit que 5″ & même j'eſtime, qu'il ne ſurpaſſe pas 3″. Suppoſant donc que ce Diamètre ſoit effectivement de 3″, parceque la Planète eſt vue d'une diſtance presque 19 fois plus grande que celle du Soleil à la terre; ſi la Planète étoit auſſi éloignée de la terre que le Soleil, elle ſe préſenteroit à nous ſous un angle de 57″ à peu près; d'où il faut conclure qu'elle ſurpaſſe en grandeur les autres Planètes, excepté Jupiter & Saturne & qu'elle eſt à peu près 36 fois plus volumineuſe que la terre. Mais ſi ſon Diamètre étoit comme Mr. *Mayer* le ſoutient de 10″ elle ſurpaſſeroit même Saturne en grandeur & ne différeroit que fort peu de Jupiter.

§. 11. Le mouvement de cette nouvelle Planète, de même qu'il ſert à nous convaincre, que cet Aſtre doit être compté parmi les autres Planètes du Syſtême Solaire, fait auſſi en même temps ſoupçonner, qu'il pourroit y avoir pluſieurs autres Planètes, à des diſtances plus conſidérables du Soleil. Car ſi l'on conſidere, que la diſtance des étoiles fixes, n'a presque aucun rapport ſenſible avec les dimenſions connues du Syſtême Planètaire; il n'y a rien

qui empêche d'imaginér que les limites de ce Syſtême s'etendent encore cent fois plus loin que l'orbe de Saturne & même au de-là ſi l'on veut. Le mouvement des Comètes qui d'aprês les ſentiments des Aſtronomes ſe fait dans des orbites Elliptiques très excentriques, fait préſumer que parmi ces Aſtres il y en a, dont les Aphélies ſe trouvent pluſieurs centaines de fois plus éloignées du Soleil, que la terre. Mais ſi l'on aimoit mieux croire que la plus grande partie des Comètes paſſent dans d'autres Syſtemes, il faut au moins avouer, que celles des Comètes dont on connoit le retour, doivent être comptées parmi les habitans du Syſtême Solaire. D'abord on ſait que la celebre Comète obſervee en 1759 & dont la dernière Periode de revolution etoit de 77 Ans, eſt dans ſon Aphelie à peu près 36 fois plus éloignée du Soleil que la terre, en ſorte que ſa diſtance Aphélie ſurpaſſe presque deux fois la diſtance de la nouvelle Planète. Les Comètes obſervées en 1532 & 1661 ont des Elémens fort reſſemblans, d'où l'on a conclu que la Comète obſervée en 1661, eſt la même que celle de 1532, ſon temps Periodique ſera donc de 129 Ans, par conſequent ſa diſtance Aphelie ſurpaſſera la diſtance du Soleil à la terre 50 fois. De même les Elémens des Comètes obſervees en 1264, 1556 ſe reſſemblent très bien, & ſi c'eſt la même Comète qui a reparu, ſon temps Periodique ſera de 292 Ans & ſa diſtance Aphelie à peu près 87 fois plus grande que celle du Soleil à la terre. On voit donc que ſi on vouloit borner l'étendue du notre Syſtême Solaire à une diſtance cent fois ſeulement plus grande que celle du Soleil à la terre, il y auroit pourtant aſſez de place depuis la Planète dernierement découverte jusqu'à ces

ces limites pour y placer pluſieurs Planètes. Quelque difficile que ſoit la découverte de ces corps céleſtes, qui par la foibleſſe de leur lumiere & la lenteur de leur mouvement, échapperont peut-être longtemps aux recherches des Aſtronomes; cette tâche laborieuſe & pénible ne manquera pas pourtant de nous procurer des connoisſances plus complettes & plus étendues ſur la vraie conſtitution du Syſtême Solaire.

Supplément aux recherches ſur la nouvelle Planète.

I. Afin de détruire tous les doutes, qui pourroient ſe préſenter par rapport aux calculs par les quels j'ai prouvé qu'une orbite Parabolique ne ſauroit ſatisfaire aux obſervations faites depuis le 17 de Mars 1781, jusqu'au 23 de Janvier 1782, ſi par hazard la première de ces obſervations, qui eſt celle du 17 de Mars ne ſe trouvoit pas aſſez exacte; j'ai cru qu'il valoit bien la peine de faire le calcul de l'orbite Parabolique en employant des obſervations plus éloignées entre elles. Pour cet effet ayant cherché des orbites Paraboliques, qui ſatisfont aux obſervations du 9 d'Avril 1781 & du 21 d'Octobre 1782 (dont la dernière a été faite à Stockholm par Mr. *Wargentin*) & ſuppoſant les diſtances Perihélies de ces lignes Paraboliques, ſucceſſivement 6, 8 & 10 fois plus grandes, que la diſtance moyenne du Soleil à la terre, j'ai trouvé les Elémens de ces orbites déterminés de la maniere qui ſuit:

Diſtance Périhél.	6	8	10
Lieu du Périhél.	6ˢ. 19°. 6′. 3″	6ˢ. 8°. 15′. 2″	5ˢ. 28°. 10′. 12″
Temps du Périh. compté d'Av. 1781	3037ʲ,6784	3328ʲ,0674	3525ʲ,2789

Enſuite ayant entrepris le calcul pour pluſieurs lieux obſervés de la nouvelle Planète, je les ai trouvé déterminés d'après ces Elémens, de cette ſorte:

Longitude de la Planète

1781 Temps moy. de Green.	6	8	10	obſervée
Avr. 9. 10ʰ. 41′	2ˢ. 25°. 3′. 19″	2ˢ. 25°. 3′. 19″	2ˢ. 25°. 3′. 19″	2ˢ. 25°. 3′. 19″
Mai 28. 9. 2	27. 14. 52	27. 13. 0	27. 12. 52	27. 19. 59
Juil. 19. 15. 11	3. 0. 16. 4	3. 0. 10. 29	3. 0. 6. 10	3. 0. 24. 11
Sept. 1. 16. 1	2. 12. 20	2. 4. 14	1. 58. 17	2. 21. 12
Oct. 22. 17. 27	2. 37. 22	2. 30. 15	2. 25. 16	2. 49. 0
1782				
Janv. 1. 7. 37	2. 29. 54. 52	3. 0. 0. 33	3. 0. 4. 56	3. 0. 25. 34
Fevr. 27. 9. 55	28. 5. 27	2. 28. 20. 7	2. 28. 29. 33	2. 28. 51. 3
Avr. 27. 7. 55	29. 13 32	29. 27. 47	29. 39. 41	29. 58 34
Juil. 23. 14. 58	3. 4. 30. 17	3. 4. 34. 23	3. 4. 37. 39	3. 4 49. 37
Aout 17. 13. 33	5. 54. 5	5. 55. 19	5. 56. 19	6. 4. 11
Oct. 2. 10. 12	7. 20. 23	7. 18. 49	7. 18. 32	7. 19. 58
21. 8. 50	7. 20. 56	7. 20. 56	7. 20. 56	7. 20. 56

§. 2.

§. 2. Il eſt d'abord clair que preſque tous les lieux calculés de la Planète ſe trouvent en défaut & même quelquefois d'une quantité très conſidérable comme de 30 à 40 Minutes. Depuis la première obſervation jusqu'à celle du 22 d'Octobre 1781 le premier Syſtême des Elémens donne les réſultats qui s'éloignent le moins des obſervations; mais enſuite depuis l'obſervation du 1 de Janvier 1782 jusqu'à celle du 17 d'Aout de la même Année les réſultats trouvés d'après ce premier Syſtême different beaucoup plus des obſervations, que les lieux calculés d'après les deux derniers. De là on conclut, que ſi l'on tâchoit de trouver une orbite Parabolique, la quelle en même temps qu'elle ſatisfairoit aux obſervations du 9 d'Avril 1781 & du 22 d'Octobre 1782, fût auſſi d'accord avec quelque obſervation intermédiaire; cette orbite Parabolique ne manqueroit pas de ſe trouver pour un grand nombre d'obſervations en défaut au moins de 30 Minutes. Par exemple ſi l'obſervation à la quelle on ſe propoſe de ſatisfaire eſt celle du 22 d'Octobre 1781, on voit bien que cela ſe fera par une orbite Parabolique dont la diſtance Périhélie eſt à peu près fois 4 plus grande que celle du Soleil à la terre; mais en réflechiſſant ſur la manière dont les erreurs des lieux calculés d'après nos trois hypothèſes procedent, il eſt éuident, que pour une diſtance Périhélie 4 fois plus grande que celle du Soleil à la terre, le lieu calculé pour le moment obſervé le 27 d'Avril 1782, différera de l'obſervation presque d'un dégré entier. En revange ſi l'on tâchoit de ſatisfaire à cette obſervation du 27 d'Avril 1782, en même temps qu'aux celles du 9 d'Avril 1781 & du 21 d'Octobre 1782, ce qui s'effectueroit par un orbite Parabo-

lique dont la diſtance Périhelie eſt 13 à 14 fois plus grande que celle du Soleil à la terre, il eſt aiſé de s'appercevoir qu'il en reſulteroit pour l'obſervation du 22 d'Octobre 1781 des erreurs de 30 Minutes à peu près. Il eſt donc inconteſtablement prouvé qu'une orbite Parabolique ne ſauroit abſolument ſatisfaire & même les erreurs devenant ſi conſidérables, on a raiſon de préſumer, que des Ellipſes dont les Excentricités ſont tant ſoit peu conſidérables ſe trouveront tout à fait exclues.

§. 3. Pour mieux conſtater la Longitude du Noeud de la nouvelle Planète & l'inclinaiſon de ſon orbite, j'ai combiné l'obſervation de cet aſtre faite par Mr. *Mayer* à Göttingue le 25 de Sept. 1756 avec quelques unes de celles qui ont été faites l'Année paſſée à Stockholm par Mr. *Wargentin*. L'intervalle de temps entre ces obſervations étant ſi conſidérable, il eſt évident que quand même on ſe ſeroit trompé un peu par rapport aux Longitudes Héliocentriques de la Planète, cela ne changeroit que fort peu dans les Elémens que je me ſuis propoſé de déterminer. Pour cet effet j'ai conſervé l'obſervation de Mr. *Mayer* réduite à ſon lieu Héliocentrique, telle que Mr. *Bode* l'a preſenté dans les Ephemerides de Berlin pour 1785: ſavoir la Longitude Héliocentrique $11^s. 17^\circ. 29'. 21''$ & la Latitude Auſtrale $44'. 45''$. Or on trouve par la combinaiſon de cette obſervation avec celle que Mr. *Wargentin* a faite à Stockholm le 17 d'Août 1782, la Longitude du Noeud $2^s. 11^\circ. 55'. 27''$ & l'inclinaiſon de l'orbite $44'. 58''$; & par la combinaiſon de l'obſervation de Mr. *Mayer* avec celle que Mr. *Wargentin* a faite le 13 d'Octobre 1782: la Longitude du Noeud $2^s. 11^\circ. 42'. 55''$

&

& l'inclinaiſon de l'orbite 44′. 59″. D'où il eſt clair ſurtout par rapport au dernier élement, que quelques petits changements dans les obſervations, avec lesquelles, celle de *Mayer* eſt combinée, ne cauſeront que de petites variations dans les réſultats.

§. 4. Dailleurs ſi l'on ſuppoſe qu'il y a une correction de 10′ à ajouter pour l'angle que la Planète a décrit autour du Soleil entre les deux obſervations, il en réſultera une correction négative de 21″ pour la Longitude du Noeud & auſſi une correction négative ſeulement d'une ſeconde pour l'inclinaiſon de l'orbite. On voit donc que la détermination des deux Elémens en queſtion, au moyen de la combinaiſon de l'obſervation de Mr. *Mayer* avec quelqu'une de celles, qui ont été faites depuis la découverte de Mr *Herſchel*, eſt presque indépendante de toute Théorie; car ſuppoſant même (ce qui ne ſauroit être) que ſelon la vraie Théorie la Longitude Héliocentrique pour le 25 de Septembre 1756 dût être diminuée d'un dégré entier, ce changement produiroit pour l'angle entre les deux lieux Héliocentriques une correction additive d'un dégré & de là il ne réſulteroit pour la Longitude du Noeud qu'une correction de 3′. 30″ à peu près à ſouſtraire & pour l'inclinaiſon de l'orbite une correction de 6″ auſſi négative. Quoique la Latitude Héliocentrique obſervée le 25 Sept. 1782 ſoit fort peu affectée par les défauts de la Théorie, au moins en tant qu'on ſuppoſe que l'orbite eſt une Ellipſe fort approchante du cercle, cependant les fautes commiſes dans la Latitude Géocentrique obſervée ſont d'une aſſés grande conſéquence. Car ſuppoſant que la correction de la Latitude ſoit de 30″ & additive, la Longitude du Noeud ſe trouve-

ra

ra par la première combinaiſon 2ˢ. 12°. 10′. 6″ & l'inclinaiſon de l'orbite 45′. 27″. En tout cas, l'obſervation du 25 de Sept. 1756 eſt certainement fort propre pour déterminer l'inclinaiſon de l'orbite de la Planète, ayant été faite lorsque cet Aſtre ſe trouvoit vers la limite de ſa plus grande Latitude auſtrale.

§. 5. Les obſervations des oppoſitions des Planètes étant à pluſieurs égards très intéreſſantes puisqu'elles donnent les Longitudes Héliocentriques ſans aucune conſidération de la Théorie; j'ai cherché l'oppoſition de la Planète avec le Soleil dans le mois de Decembre 1781, par les obſervations, qui ont été faites par Mr. *Mechain* à Paris le 20 & 22 Decembre & par Mr. *Mayer* à Manheim le 21 & 23 du même mois. Voici les obſervations:

Temps moy. de Greenv.			Longitude de la Planète.
1781. Déc.	20.	8ʰ. 49′. 14″	- 3ˢ. 0°. 56′. 1″.
	21.	11. 26. 38	- 3. 0. 53. 8.
	22.	9. 5. 24	- 3. 0. 51. 4.
	23.	11. 18. 20	- 3. 0. 47. 52.

Ayant enſuite calculé les lieux du Soleil pour ces quatre moments du temps & les diſtances du Soleil à la terre, ſi l'on ſuppoſé la diſtance de la Planète au Soleil 18,886, on trouvera les lieux Héliocentriques de la Planète déterminés en ſorte:

1781. Déc.	20.	8ʰ. 49′. 14″	- 3ˢ. 0°. 51′. 25″.
	21.	11. 26. 38	- 3. 0. 52. 14.
	22.	9. 5. 24	- 3. 0. 53. 11.
	23.	11. 18. 20	- 3. 0. 53. 35.

Donc

Donc pour le 21 Dec. 18^h. temps moyen de Greenv. on aura la Longitude Héliocentrique:

Par la Ire.	Obſervation	3^s.	0°.	$52'$.	$25''$.
II^{de}.	Obſervation	3.	0.	52.	26.
IIIme.	Obſervation	3.	0.	52.	44.
IVme.	Obſervation	3.	0.	52.	21.

La quantité moyenne eſt 3^h. 0°. $52'$. $29''$, mais comme le réſultat pour la troiſième obſervation paroît un peu douteux, en donnant l'excluſion à ce réſultat, nous aurons la Longitude Héliocentrique pour le 21 Décembre à 18^h. Temps moyen de Greenv. 3^s. 0°. $52'$. $24''$. Par conſéquent le moment de l'oppoſition du Soleil & de la Planète ſera le 21 Decembre 1781 à 18^h. $3'$. temps moyen de Greenwich, la Longitude du Soleil étant alors 9^s. 0°. $52'$. $24''$. Or la Latitude Géocentrique ayant été obſervée $15'$. $3''$ à peu près, il s'enſuivra, la Latitude Héliocentrique $14'$. $27''$. Quoique la conſidération de la Théorie de la Planète, entre dans cette détermination du temps de la conjonction; chacun voit pourtant qu'il y eſt pour ſi peu de choſe, qu'il ne peut s'en ſuivre aucune erreur ſenſible dans le réſultat. D'ailleurs l'accord ſurprenant des obſervations du 20, 21 & 23 de Décembre, fournit une preuve inconteſtable, que la Longitude de la Planète trouvée pour le temps de l'oppoſition eſt fort exacte.

SOLVTIONES QVORVNDAM PROBLEMATVM ASTRONOMICORVM, AD DOCTRINAM DE MOTV PLANETARVM ET COMETARVM IN SECTIONIBVS CONICIS PERTINENTIVM.

Auctore

A. J. LEXELL.

§. 1.

Cum in inueſtigandis Elementis orbitae pro Cometa Anno 1770 obſeruato, occupatus eſſem, in plura incidi Problemata Aſtronomica, quorum ſolutiones pro negotio meo perficiendo, mihi eruere neceſſe erat; inter quae, nonnulla equidem non prorſus obuia eſſe, mihi viſa ſunt, vnde confido omnino operae pretium fore, vt eorum ſolutiones accurate exponam. Quae autem heic tradenda ſunt Problemata, ſingula in eo verſantur, vt ſi cognita fuerint bina loca Planetae vel Cometae Heliocentrica, tumque praeterea detur quodpiam Elementorum ad eius orbitam pertinentium, vtpote vel axis maior, vel parameter, vel excentricitas, ipſa orbita horum datorum ope determinetur. In principiis Mathematicis Philoſophiae Nat. Illuſtris

luſtris *Newtoni*, Lib. I. Sect. IV., ſolutiones quidem traduntur variorum Problematum ad hoc genus pertinentium; verum quum omnes iſtae Solutiones Geometricae ſint et per conſtructiones perficiantur; facile intelligitur, eas noſtro inſtituto non accommodatas eſſe, quippe quum hic ſolutiones praeprimis deſiderentur analyticae et quorum applicatio ad caſus datos motuum Cometarum vel Planetarum per calculum numericum perfici queat.

Problema 1.

§. 2. *Si dentur bina loca Planetae vel Cometae Heliocentrica et parameter orbitae in qua hic Planeta vel Cometa mouetur, reliqua Elementa eiusdem orbitae inuenire.*

§. 3. Ponamus axem orbitae A M N a Planeta deſcriptae eſſe A B, Perihelio in A exiſtente, & bina loca Planetae cognita eſſe M atque N, ita vt pro datis haberi queant diſtantiae F M, F N et angulus M F N. Si igitur indigitentur F M per c, F N per c' et anguli A F M, A F N per Φ et Φ' reſpectiue, problematis noſtri ſolutio eo reducitur, vt valores horum angulorum Φ et Φ' inueſtigentur; quippe quibus inuentis, ex dato ſimul parametro, excentricitas nullo negotio eruetur. Dicatur itaque ſemiparameter orbitae b, excentricitas autem e, et quum ſit Tab. XI. Fig. 3.

$$c(1 + e\,\text{coſ.}\,\Phi) = b \text{ et } c'(1 + e\,\text{coſ.}\,\Phi') = b, \text{ fiet}$$

$$e\,\text{coſ.}\,\Phi = \frac{b}{c} - 1,\quad e\,\text{coſ.}\,\Phi' = \frac{b}{c'} - 1, \text{ hincque}$$

$$\frac{\text{coſ.}\,\Phi}{\text{coſ.}\,\Phi'} = \frac{c'(b-c)}{c(b-c')}, \text{ ideoque}$$

$$\frac{\text{coſ.}\,\Phi' - \text{coſ.}\,\Phi}{\text{coſ.}\,\Phi' + \text{coſ.}\,\Phi} = \frac{c(b-c') - c'(b-c)}{c(b-c') + c'(b-c)}, \text{ ſeu}$$

$$\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}(\Phi' - \Phi)\,\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}(\Phi' + \Phi) = \frac{b(c'-c)}{b(c'+c') - 2cc'};$$

 quae

quae aequalitas etiam ſequentibus modis exprimi poteſt:

$$\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}(\Phi' - \Phi)\ \text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}(\Phi' + \Phi)$$

$$= \frac{b\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{c'}\right)}{b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{c'}\right) - 2} = \frac{\frac{1}{c} - \frac{1}{c'}}{\frac{1}{c} + \frac{1}{c'} - \frac{2}{b}}.$$

Cognito igitur angulo $MFN = \Phi' - \Phi$, ope formularum traditarum inueniri poteſt $\frac{1}{2}(\Phi' + \Phi)$, hincque elicietur

$$AFM = \Phi = \tfrac{1}{2}(\Phi' + \Phi) - \tfrac{1}{2}(\Phi' - \Phi) \text{ et}$$

$$AFN = \tfrac{1}{2}(\Phi' + \Phi) + \tfrac{1}{2}(\Phi' - \Phi),$$

tum vero erit $e = \frac{b - c}{c\,\text{coſ.}\,\Phi} = \frac{b - c'}{c'\,\text{coſ.}\,\Phi'}$. Ex quibus denique reliqua orbitae Elementa ſponte innoteſcunt; erit enim diſtantia Perihelii $= \frac{b}{1 + e}$; diſtantia Aphelii $= \frac{b}{1 - e}$ et ſemiaxis maior $= \frac{b}{1 - e^2}$.

§. 4. Si quis loco angulorum Φ et Φ', huius Problematis ſolutionem, per inueſtigationem excentricitatis e adgredi vellet, ſolutio quidem non adeo concinna prodiret, interim tamen forſan haud praeter rem erit, eiusdem heic meminiſſe. Quum itaque ſit

$$MFN = \Phi' - \Phi = 2\,\delta, \text{ vnde}$$

$$\text{coſ.}\,\Phi' = \text{coſ.}\,2\,\delta\ \text{coſ.}\,\Phi - \text{ſin.}\,2\,\delta\ \text{ſin.}\,\Phi,$$

tumque habeatur

$$\text{coſ.}\,\Phi' = \frac{b - c'}{e\,c'};\ \text{coſ.}\,\Phi = \frac{b - c}{e\,c};$$

ſuffectis pro coſ. Φ', coſ. Φ, eorum valoribus, erit

$$\frac{b - c'}{e\,c'} = \frac{b - c}{e\,c}.\,\text{coſ.}\,2\,\delta - \text{ſin.}\,\Phi\ \text{ſin.}\,2\,\delta \text{ et}$$

$$\text{ſin.}\,\Phi = \frac{b - c}{e\,c}\,\text{cot.}\,2\,\delta + \frac{c' - b}{e\,c'\,\text{ſin.}\,2\,\delta}, \text{ hinc fit}$$

$$1 = \text{ſin.}\,\Phi^2 + \text{coſ.}\,\Phi^2 = \frac{(b - c)^2}{e^2\,c^2}$$

$$+ \frac{(b - c)^2}{e^2\,c^2}\,\text{cot.}\,2\,\delta^2 - \frac{2\,(b - c)(b - c')\,\text{coſ.}\,2\,\delta}{e^2\,c\,c'.\,\text{ſin.}\,2\,\delta^2} + \frac{(b - c')^2}{e^2\,c'^2\,\text{ſin.}\,2\,\delta^2},$$

ideo-

ideoque

$$e^2 = \frac{(b-c)^2}{c^2 \,\text{ſin.}\, 2\delta^2} - \frac{2(b-c)(b-c')\,\text{coſ.}\, 2\delta}{c c' \,\text{ſin.}\, 2\delta^2} + \frac{(b-c')^2}{c'^2 \,\text{ſin.}\, 2\delta^2}.$$

Exprimatur breuitatis gratia $\frac{b}{c}$ per m et $\frac{b}{c'}$ per n, fietque

$$e^2 = \frac{(m-1)^2}{\text{ſin.}\, 2\delta^2} - \frac{2(m-1)(n-1)\,\text{coſ.}\, 2\delta}{\text{ſin.}\, 2\delta^2} + \frac{(n-1)^2}{\text{ſin.}\, 2\delta^2}, \text{ ſiue}$$

$$e^2 \,\text{ſin.}\, 2\delta^2 = (m-1)^2 - 2(m-1)(n-1)\,\text{coſ.}\, 2\delta$$
$$+ (n-1)^2 = (m-n)^2 + 2(m-1)(n-1)(1-\text{coſ.}\, 2\delta)$$
$$= (m-n)^2 + 4(m-1)(n-1)\,\text{ſin.}\,\delta^2, \text{ hinc}$$
$$e^2 \,\text{ſin.}\, 2\delta^2 = (m-n)^2 \left(1 + \frac{4(m-1)(n-1)\,\text{ſin.}\,\delta^2}{(m-n)^2}\right),$$

vnde ſi ſtatuatur

$$\frac{4(m-1)(n-1)\,\text{ſin.}\,\delta^2}{(m-n)^2} = \text{Tang.}\,\theta^2, \text{ fiet}$$
$$e \,\text{ſin.}\, 2\delta = \frac{m-n}{\text{coſ.}\,\theta} \text{ et } e = \frac{m-n}{\text{ſin.}\, 2\delta \,\text{coſ.}\,\theta}.$$

§. 4. Quum ſit $\frac{\text{coſ.}\,\Phi'}{\text{coſ.}\,\Phi} = \frac{c(b-c')}{c'(b-c)}$, ſi ponatur

$$\Phi' = 2\delta + \Phi, \text{ erit } \text{coſ.}\,\Phi' = \text{coſ.}\, 2\delta\, \text{coſ.}\,\Phi - \text{ſin.}\, 2\delta\, \text{ſin.}\,\Phi,$$

hinc

$$\frac{\text{coſ.}\,\Phi'}{\text{coſ.}\,\Phi} = \frac{c(b-c')}{c'(b-c)} = \text{coſ.}\, 2\delta - \text{ſin.}\, 2\delta.\, \text{Tang.}\,\Phi,$$

ex qua aequatione, angulus Φ erui poteſt, id quod commodiſſime fiet, ſi ponatur

$$\frac{c(b-c')}{c'(b-c)\,\text{ſin.}\, 2\delta} = \text{cot.}\, 2\eta,$$

tum enim erit

$$\text{Tang.}\,\Phi = \text{cot.}\, 2\delta - \text{cot.}\, 2\eta, \text{ ideoque}$$
$$\text{Tang.}\,\Phi = \frac{\text{ſin.}\,(2\eta - 2\delta)}{\text{ſin.}\, 2\eta\, \text{ſin.}\, 2\delta},$$

verum tamen formula pro Tang. $\frac{1}{2}(\Phi' + \Phi)$ ſupra allata commodior omnino eſſe videtur.

§. 5. Quo melius applicatio formularum ſupra traditarum pateſcat, exemplo quodam eandem illuſtrare e re erit. Ponamus itaque eſſe:

$c = 0,6798945\,;\; c' = 1,0864448\,;$

$L\,b = 0,0808000$ et $\Phi' - \Phi = 89^\circ.\,43'.\,8''$,

et calculus pro formulis §. 2. allatis erit:

$L\,2 = 0,3010300$	$c' = 1,0864448$
$L.\,b = 0,0808000$	$c = 0,6798945$
$L.\,\frac{2}{b} = 0,2202300$	$c' - c = 0,4065503$
$L.\,c = 9,8324416$	$c' + c = 1,7663393$
$L.\,c' = 0,0360077$	$\frac{2cc'}{b} = 1,2265331$
$L.\,\frac{2cc'}{b} = 0,0886793$	$D = c' + c - \frac{2cc'}{b} = 0,5398062$
$L.\,(c' - c) = 9,6091143$	$\frac{1}{2}(\Phi' + \Phi) = 37^\circ.\,7'.\,12'',3$
$L.\,D. = 9,7322378$	$\frac{1}{2}(\Phi' - \Phi) = 44.\,51.\,34,$
$9,8768765$	$\Phi' = 81.\,58.\,46,\,3$
$L.\mathrm{cot.}\frac{1}{2}(\Phi' - \Phi) = 0,0021308$	$\Phi = -\;7.\,44.\,21,\,7$
$L.\mathrm{tg.}\frac{1}{2}(\Phi' + \Phi) = 9,8790073$	
$L.\,b = 0,0808000$	$L.\,\frac{b}{c} - 1 = 9,8873753$
$L.\,\frac{1}{c} = 0,1675584$	$L.\,\mathrm{coſ.}\,\Phi' = 9,9960257$
$L.\,\frac{b}{c} = 0,2483584$	$L.\,e = 9,8913496$
$\frac{b}{c} - 1 = 0,7715700$	$e = 0,77865$
$L.\,b = 0,0808000$	$L.\,(\frac{b}{c'} - 1) = 9,0360078$
$L.\,\frac{1}{c'} = 9,9639923$	$L.\,\mathrm{coſ.}\,\Phi' = 9,1446578$
$L.\,\frac{b}{c'} = 0,0447923$	$L.\,e = 9,8913500$
$\frac{b}{c'} - 1 = 0,1086445$	

Hinc

Hinc quum bini valores pro e inuenti, tam prope inter ſe conueniant, id indicio eſt calculum bene eſſe inſtitutum.

§. 6. Si ope formulae §. 3. allatae angulus Φ inueſtigandus ſit, calculus hunc in modum procedet:

$$\mathrm{L.}\left(\tfrac{b}{c'}-1\right) = 9,0360078$$
$$\mathrm{L.F} = 9,8873701$$
$$\mathrm{L.\,cot.}\,2\eta = 9,1486377$$

$$2\eta = 81^\circ.\,59'.\,5'',3$$
$$2\delta = 89.\,43.\,8,\,0$$
$$2\delta - 2\eta = 8.\,44.\,2,\,7$$
$$\Phi = 7^\circ.\,44'.\,21'',\,8$$

$$\mathrm{L.}\left(\tfrac{b}{c}-1\right) = 9,8873753$$
$$\mathrm{L.\,ſin.}\,2\delta = 9,9999948$$
$$\mathrm{L.F} = \mathrm{L.}\left(\tfrac{b}{c'}-1\right)\mathrm{ſin.}\,2\delta = 9,8873701$$

$$\mathrm{L.\,ſin.}\,2\delta = 9,9999948$$
$$\mathrm{L.\,ſin.}\,2\eta = 9,9957345$$
$$9,9957293$$
$$\mathrm{L.\,ſin.}\,(2\delta-2\eta) = 9,1289663$$
$$\mathrm{L.\,cot.}\,\Phi = 0,8667630$$

vbi valor ipſius Φ non niſi decima parte ſcrupuli ſecundi a prius inuento differt. Denique in ſubſidium vocata formula pro e §. 4. allata, inuenietur angulus $\theta = 31^\circ.\,38'.\,19''$, $m-n = 0,6629255$, hincque Log. $e = 9,8913498$, qui valor cum ſupra inuentis admodum bene conſentit.

Problema 2.

§. 7. *Datis binis locis Planetae vel Cometae Heliocentricis et excentricitate orbitae, inuenire reliqua eiusdem orbitae Elementa.*

Excentricitatem heic eo ſenſu accipio, quo in Aſtronomia communiter accipi ſolet, ita vt deſignet rationem inter

inter diſtantiam foci a centro et ſemiaxem maiorem orbitae, ideoque ſi ſemiaxis maior vnitate deſignetur, excentricitas ipſam diſtantiam foci a centro exprimet. Retentis igitur iisdem denominationibus ac in Problemate praecedenti, habebimus

$$c\,(1 + e \operatorname{coſ.} \Phi) = c'\,(1 + e \operatorname{coſ.} \Phi')\text{, hinc}$$
$$c' - c = e\,(c \operatorname{coſ.} \Phi - c' \operatorname{coſ.} \Phi').$$

Statuamus nunc eſſe $\Phi' + \Phi = 2\,\varepsilon$ et $\Phi' - \Phi = 2\,\delta$, ideoque $\Phi' = \varepsilon + \delta$ et $\Phi = \varepsilon - \delta$, erit

$$\operatorname{coſ.} \Phi = \operatorname{coſ.} \varepsilon \operatorname{coſ.} \delta + \operatorname{ſin.} \varepsilon \operatorname{ſin.} \delta \text{ et}$$
$$\operatorname{coſ.} \Phi' = \operatorname{coſ.} \varepsilon \operatorname{coſ.} \delta - \operatorname{ſin.} \varepsilon \operatorname{ſin.} \delta\text{, proinde}$$
$$c' - c = e\,((c - c') \operatorname{coſ.} \varepsilon \operatorname{coſ.} \delta + (c' + c) \operatorname{ſin.} \varepsilon \operatorname{ſin.} \delta),$$

vnde colligitur

$$\frac{1}{e} = - \operatorname{coſ.} \varepsilon \operatorname{coſ.} \delta + \frac{c' + c}{c' - c} \operatorname{ſin.} \varepsilon \operatorname{ſin.} \delta.$$

Ponamus itaque $\frac{c' + c}{c' - c} \operatorname{tang.} \delta = \operatorname{tang.} \eta$, fietque

$$\frac{1}{e \operatorname{coſ.} \delta} = - \operatorname{coſ.} \varepsilon + \operatorname{ſin.} \varepsilon \operatorname{tang.} \eta\text{, hincque}$$
$$\frac{\operatorname{coſ.} \eta}{e \operatorname{coſ.} \delta} = - \operatorname{coſ.} \varepsilon \operatorname{coſ.} \eta + \operatorname{ſin.} \varepsilon \operatorname{ſin.} \eta = - \operatorname{coſ.} (\varepsilon + \eta),$$

cuius aequationis ſubſidio inuenietur angulus $\varepsilon + \eta$, hincque cognito iam angulo η determinabitur ε, ideoque $\Phi = \varepsilon - \delta$ et $\Phi' = \varepsilon + \delta$, tum vero erit

$$b = c\,(1 + e \operatorname{coſ.} \Phi) = c'\,(1 + e \operatorname{coſ.} \Phi').$$

§. 8. Tum hac quoque ratione negotium perfici poteſt: ob

$$\Phi' = 2\,\delta + \Phi\text{, erit } \operatorname{coſ.} \Phi' = \operatorname{coſ.} 2\,\delta \operatorname{coſ.} \Phi - \operatorname{ſin.} 2\,\delta \operatorname{ſin.} \Phi,$$

hincque

$$c' - c = e\,(c \operatorname{coſ.} \Phi - c' \operatorname{coſ.} 2\,\delta \operatorname{coſ.} \Phi + c' \operatorname{ſin.} 2\,\delta \operatorname{ſin.} \Phi),$$

quae-

quaeratur nunc $\cot.\gamma = \frac{c - c' \,coſ.\, 2\delta}{c' \,ſin.\, 2\delta}$, eritque

$$\frac{c' - c}{e\, c' \,ſin.\, 2\delta} = \cot.\gamma \,coſ.\, \phi + ſin.\, \phi,$$

nec non

$$\frac{(c' - c)\, ſin.\, \gamma}{c'\, e \,ſin.\, 2\delta} = coſ.\gamma \,coſ.\phi + ſin.\gamma \,ſin.\phi = coſ.(\gamma - \phi),$$

per quam formulam inuenietur angulus $\gamma - \phi$, hincque ob datum angulum γ innoteſcet ϕ. Denique ſi aequatio cuius ope §. 4. inueſtigauimus valorem ipſius e, euoluatur, conſequemur:

$$e^2 \,ſin.\, 2\delta^2 = b^2 \left(\frac{1}{c^2} - \frac{2\,coſ.\, 2\delta}{c c'} + \frac{1}{c'^2}\right)$$
$$- 2b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{c'}\right)(1 - coſ.\, 2\delta) + 2(1 - coſ.\, 2\delta),$$

quae aequatio inſeruire poterit determinando valori ipſius b, quod tamen quum non niſi operoſo ſatis labore praeſtari poſſit, ſolutionibus ſupra allatis merito acquieſcere licebit.

§. 9. Quo vſus formularum ſupra allatarum eo euidentius ob oculos ponatur, earum adplicationem ſequenti exemplo illuſtrare placebit. Sit

$$c = 0,6700308 \quad c' = 1,1159573,$$

$$\phi' - \phi = 89°.27'.31'',0, \text{ hinc } \delta = 44°.43'.45'',5$$

ponatur item eſſe $L\, e = 9,9500000$, eritque calculus:

$c' = 1,1159573$	L. tang. $\delta = 9,9958962$
$c = 0,6700308$	L. $c' + c = 0,2518787$
$c' + c = 1,7859881$	$0,2477749$
$c' - c = 0,4459265$	L. $c' - c = 9,6492633$
	L. tang. $\eta = 0,5985116$

$\eta = 75°. 51'. 11'',6$
$\varepsilon + \eta = 112. 42. 20, 8$
$\varepsilon = 36. 51. 9, 2$
$\delta = 44. 43. 45, 5$
$\phi = - 7. 52. 36, 3$
$\phi' = 81. 34. 54, 7$

L. coſ. $\eta = 9, 3881132$
L. $\frac{1}{e} = 0, 0500000$
$9, 4381132$
L. coſ. $\delta = 9, 8515271$
L. $-$ coſ. $(\varepsilon+\eta) = 9, 5865861$

L. $e = 9, 9500000$
L. coſ. $\phi = 9, 9958829$
L. e coſ. $\phi = 9, 9458829$
$1 + e$ coſ. $\phi = 1, 8828418$

L. $e = 9, 9500000$
L. coſ. $\phi' = 9, 1655298$
L. e coſ. $\phi' = 9, 1155298$
$1 + e'$ coſ. $\phi' = 1, 1304753$

L. $c = 9, 8260947$
L.$(1 + e$ coſ.$\phi) = 0, 2748138$
L. $b = 0, 1009085$
L. $(1 + e) = 0, 2767491$
$9, 8241594$
L. $(1 - e) = 9, 0364253$
L. $a = 0, 7877341$

L. $c' = 0, 0476478$
L.$(1 + e$ coſ.$\phi') = 0, 0532608$
L. $b = 0, 1009086$
$b = 1, 2615620$
$\frac{b}{1+e}$ = Diſt. Perih. $= 0, 6670515$
Sem. maior $= a = 6, 1338630$

Problema 3.

§. 10. *Si vt ſupra bina cognita fuerint loca Heliocentrica Planetae vel Cometae, praetereaque detur eius diſtantia Perihelii, reliqua orbitae Elementa determinare.*

Indigitetur diſtantia Perihelii per d, reliquae autem denominationes in prioribus allatae maneant, eritque

$d =$

$d = \frac{b}{1+e}$. Quum autem ſit

$$\frac{1+e\,\text{coſ.}\,\Phi}{b} = \frac{1}{c} \text{ et } \frac{1+e\,\text{coſ.}\,\Phi'}{b} = \frac{1}{c'},$$

hinc colligetur

$$\frac{1+e}{b} - \frac{e(1-\text{coſ.}\,\Phi)}{b} = \frac{1}{c}, \text{ et } \frac{1+e}{b} - \frac{e(1-\text{coſ.}\,\Phi')}{b} = \frac{1}{c'},$$

ſeu quod eodem redit

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{c} = \frac{e}{b}(1-\text{coſ.}\,\Phi),\ \frac{1}{d} - \frac{1}{c'} = \frac{e}{b}(1-\text{coſ.}\,\Phi'),$$

hincque

$$\frac{1-\text{coſ.}\,\Phi}{1-\text{coſ.}\,\Phi'} = \frac{\frac{1}{d}-\frac{1}{c}}{\frac{1}{d}-\frac{1}{c'}},$$

vnde colligitur

$$\frac{\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\Phi^2}{\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\Phi'^2} = \frac{1-\frac{d}{c}}{1-\frac{d}{c'}} \text{ et } \frac{\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\Phi}{\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\Phi'} = \frac{\sqrt{(1-\frac{d}{c})}}{\sqrt{(1-\frac{d}{c'})}}.$$

Vt haec formula eo commodius tractari queat, ſtatuamus:

$$\frac{d}{c} = \text{coſ.}\,\alpha;\ \frac{d}{c'} = \text{coſ.}\,\alpha', \text{ eritque}$$

$$\frac{\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\Phi}{\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\Phi'} = \frac{\sqrt{(1-\text{coſ.}\,\alpha)}}{\sqrt{(1-\text{coſ.}\,\alpha')}} = \frac{\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\alpha}{\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\alpha'},$$

ex quo deducitur

$$\frac{\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\Phi' - \text{ſin.}\,\frac{1}{2}\Phi}{\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\Phi' + \text{ſin.}\,\frac{1}{2}\Phi} = \frac{\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\alpha' - \text{ſin.}\,\frac{1}{2}\alpha}{\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\alpha' + \text{ſin.}\,\frac{1}{2}\alpha},$$

hincque

$$\frac{\text{tang.}\,\frac{1}{4}(\Phi'-\Phi)}{\text{tang.}\,\frac{1}{4}(\Phi'+\Phi)} = \frac{\text{tang.}\,\frac{1}{4}(\alpha'-\alpha)}{\text{tang.}\,\frac{1}{4}(\alpha'+\alpha)},$$

ideoque fiet

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{4}(\Phi'+\Phi) = \text{tang.}\,\tfrac{1}{4}(\Phi'-\Phi)\ \text{tang.}\,\tfrac{1}{4}(\alpha'+\alpha)\ \text{cot.}\,\tfrac{1}{4}(\alpha'-\alpha).$$

Deinde ob

$$1 + e \text{ coſ. } \Phi = \frac{b}{c} = (1 + e) \frac{d}{c} = (1 + e) \text{ coſ. } \alpha,$$

fiet

$$e = \frac{1 - \text{coſ. } \alpha}{\text{coſ. } \alpha - \text{coſ. } \Phi} = \frac{\text{ſin. } \frac{1}{2} \alpha^2}{\text{ſin. } \frac{1}{2} (\Phi - \alpha) \text{ ſin. } \frac{1}{2} (\Phi + \alpha)}$$
$$= \frac{\text{ſin. } \frac{1}{2} \alpha'^2}{\text{ſin. } \frac{1}{2} (\Phi' - \alpha') . \text{ ſin. } \frac{1}{2} (\Phi' + \alpha')};$$

caeterum ad inueniendum valorem ipſius e, adhiberi quoque poterit formula $e = \frac{c' - c}{c \text{ coſ. } \Phi - c' \text{ coſ. } \Phi'}$; inuenta autem excentricitate, reliqua orbitae elementa prouti diſtantia Perihelii et ſemiaxis maior nullo labore inueſtigantur.

§. 11. In ſuperioribus inuenimus $\frac{\text{ſin. } \frac{1}{2} \Phi'}{\text{ſin. } \frac{1}{2} \Phi} = \frac{\text{ſin. } \frac{1}{2} \alpha'}{\text{ſin. } \frac{1}{2} \alpha}$, ſi igitur ſtatuatur $\Phi' = \varepsilon + \delta$ et $\Phi = \varepsilon - \delta$ erit $\Phi' - \Phi = 2\delta$ et $\frac{1}{2} \Phi' = \delta + \frac{1}{2} \Phi$, hinc

$$\text{ſin. } \frac{1}{2} \Phi' = \text{ſin. } \delta \text{ coſ. } \frac{1}{2} \Phi + \text{coſ. } \delta \text{ ſin. } \frac{1}{2} \Phi,$$

quo valore in noſtra formula ſubſtituto, conſequimur

$$\text{ſin. } \delta \text{ cot. } \frac{1}{2} \Phi + \text{coſ. } \delta = \frac{\text{ſin. } \frac{1}{2} \alpha'}{\text{ſin. } \frac{1}{2} \alpha},$$

ideoque

$$\text{cot. } \frac{1}{2} \Phi = \frac{\text{ſin. } \frac{1}{2} \alpha'}{\text{ſin. } \frac{1}{2} \alpha \text{ ſin. } \delta} - \text{cot. } \delta;$$

cuius formulae ope valor anguli Φ innoteſcet. Tum vero ſi in aequatione §. 8 allata:

$$c^2 \text{ ſin. } 2\delta^2 = b^2 \left(\frac{1}{c^2} - \frac{2 \text{ coſ. } 2\delta}{c c'} + \frac{1}{c'^2}\right) - 2b \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{c'}\right) (1 - \text{coſ. } 2\delta)$$
$$+ 2 (1 - \text{coſ. } 2\delta),$$

loco b ſubſtituatur $d (1 + e)$, prodibit aequatio, quae praeter

ter quantitates cognitas, ſolam incognitam e complectitur, ex qua autem non niſi operoſo aliquantum labore, valor huius incognitae e elicitur, quamobrem huius aequationis vlteriori euolutioni nihil eſt vt immoremur.

§. 12. Species ſectionis conicae exvalore ipſius e innoteſcit, quippe quum ſi fuerit $e < 1$, ſectio conica certe erit ellipſis, ſin autem ſit $e > 1$, haec ſectio in hyperbolam abibit, tumque poſito $e = 1$, ſectio conica erit Parabola. Quum igitur ſit $e = \frac{1 - \text{coſ.}\, \alpha}{\text{coſ.}\, \alpha - \text{coſ.}\, \Phi}$, indoles huius fractionis naturam ſectionis conicae declarabit. Pro ellipſi igitur habebimus $1 - \text{coſ.}\, \alpha < \text{coſ.}\, \alpha - \text{coſ.}\, \Phi$ hinc

$1 < 2\, \text{coſ.}\, \alpha - \text{coſ.}\, \Phi$ et $1 + \text{coſ.}\, \Phi < 2\, \text{coſ.}\, \alpha$, ſiue $\text{coſ.}\, \tfrac{1}{2} \Phi^2 > \text{coſ.}\, \alpha$, pro Parabola erit $\text{coſ.}\, \tfrac{1}{2} \Phi^2 = \text{coſ.}\, \alpha$ et pro Hyperbola $\text{coſ.}\, \tfrac{1}{2} \Phi^2 > \text{coſ.}\, \alpha$. Tum vero ex formula $e = \frac{c' - c}{c\, \text{coſ.}\, \Phi - c'\, \text{coſ.}\, \Phi'}$, erit pro Ellipſi: $c' - c < c\, \text{coſ.}\, \Phi - c'\, \text{coſ.}\, \Phi'$, ſiue

$$c' (1 + \text{coſ.}\, \Phi') < c (1 + \text{coſ.}\, \Phi),$$

hoc eſt $\frac{c'}{c} < \frac{\text{coſ.}\, \frac{1}{2} \Phi^2}{\text{coſ.}\, \frac{1}{2} \Phi'^2}$; pro Parabola

$$\frac{c'}{c} = \frac{\text{coſ.}\, \frac{1}{2} \Phi^2}{\text{coſ.}\, \frac{1}{2} \Phi'^2}, \text{ et pro Hyperbola } \frac{c'}{c} > \frac{\text{coſ.}\, \frac{1}{2} \Phi^2}{\text{coſ.}\, \frac{1}{2} \Phi'^2}.$$

§. 13. In ſolutione noſtra §. 10. allata, ſupponitur datam eſſe diſtantiam Perihelii, non vero diſtantiam Aphelii, quippe quum pro hac poſteriori ſuppoſitione, iſtae conditiones $\frac{d}{c} = \text{coſ.}\, \alpha$ et $\frac{d}{c'} = \text{coſ.}\, \alpha'$, nequaquam locum habere queant. Interim tamen ſi pro caſu Ellipſeos data fuerit diſtantia Aphelii, conſequemur huiusmodi aequationem:

$$\frac{1+\text{coſ.}\,\Phi}{1+\text{coſ.}\,\Phi'}=\frac{\frac{1}{c}-\frac{1}{d}}{\frac{1}{c'}-\frac{1}{d}},\ \text{hinc}$$

$$\frac{\text{coſ.}\,\frac{1}{2}\Phi}{\text{coſ.}\,\frac{1}{2}\Phi'}=\frac{\sqrt{(\frac{1}{c}-\frac{1}{d})}}{\sqrt{(\frac{1}{c'}-\frac{1}{d})}}\ \text{et}$$

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}(\Phi'-\Phi)\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}(\Phi'+\Phi)=\frac{\sqrt{(\frac{1}{c}-\frac{1}{d})}-\sqrt{(\frac{1}{c'}-\frac{1}{d})}}{\sqrt{(\frac{1}{c}-\frac{1}{d})}+\sqrt{(\frac{1}{c'}-\frac{1}{d})}}.$$

§. 14. More conſueto nunc quoque adplicationem ſolutionis ſupra allatae exemplo quodam illuſtrare conueniet. Ponamus igitur eſſe

$$d=0{,}6745280,\ \tfrac{1}{c}=0{,}8250919;\ \tfrac{1}{c'}=0{,}9158540$$
$$\text{et}\ \Phi'-\Phi=172^\circ.\ 44'.\ 10''.$$

$L\,d=9{,}8290000$	$L\,d=9{,}8290000$
$L\,\frac{1}{c}=9{,}9165023$	$L\,\frac{1}{c'}=9{,}9618262$
$L\,\text{coſ.}\,\alpha=9{,}7455023$	$L\,\text{coſ.}\,\alpha'=9{,}7908262$
$\alpha=56^\circ.\,10'.\,57'',45$	$\alpha'=51^\circ.\,50'.\,47'',72$
	$\alpha=56.\ 10.\ 57,\ 45$
$\frac{1}{2}(\alpha+\alpha')=27.\ 0.\ 26'',29$	$\alpha+\alpha'=108.\ 1.\ 45,\ 17$
$\frac{1}{2}(\alpha-\alpha')=1.\ 5.\ 2,\ 43$	$\alpha-\alpha'=4.\ 20.\ 9,\ 73$
$\frac{1}{2}(\Phi'-\Phi)=43.\ 11.\ 2,\ 5$	
$L\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}(\Phi'-\Phi)=9{,}9724518$	$\frac{1}{2}(\Phi'+\Phi)=-\ 1^\circ.\,59'.\,43'',91$
$L\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}(\alpha-\alpha')=8{,}2769625$	$\frac{1}{2}(\Phi'-\Phi)=43.\ 11.\ 2,\ 50$
$8{,}2494143$	$\frac{1}{2}\Phi'=41.\ 11.\ 18,\ 59$
$L\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}(\alpha+\alpha')=9{,}7073028$	$\frac{1}{2}\Phi=-45.\ 10.\ 46,\ 41$
$L\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}(\Phi'+\Phi)=8{,}5421115$	$\Phi'=82.\ 22.\ 37,\ 18$
	$\Phi=-90.\ 21.\ 32,\ 82$

$\frac{1}{2}(\Phi$

$\frac{1}{2}(\Phi - \alpha) = 73^\circ.\ 16'.\ 15'', 13$

$\frac{1}{2}(\Phi + \alpha) = -17.\ 5.\ 17, 68$

$L\ \text{ſin.}\ \frac{1}{2}(\Phi - \alpha) = 9, 9812187$

$L\ \text{ſin.}\ \frac{1}{2}(\Phi + \alpha) = 9, 4681172$

$9, 4493359$

$L\ \text{ſin.}\ \frac{1}{2}\alpha^2 = 9, 3458172$

$L\ e = 9, 8964813$

$e = 0, 7879186$

$L\ d = 9, 8290000$

$L\ (1 + e) = 0, 2523476$

$L\ b = 0, 0813476$

$\frac{1}{2}(\Phi' - \alpha') = 15^\circ.\ 15'.\ 54'', 73$

$\frac{1}{2}(\Phi' + \alpha') = 67.\ 6.\ 42, 45$

$L\ \text{ſin.}\ \frac{1}{2}(\Phi' - \alpha') = 9, 4204304$

$L\ \text{ſin.}\ \frac{1}{2}(\Phi' + \alpha') = 9, 9643848$

$9, 3848152$

$L\ \text{ſin.}\ \frac{1}{2}\alpha'^2 = 9, 2812954$

$L\ e = 9, 8964802$

$L\ d = 9, 8290000$

$L\ (1 - e) = 9, 3265025$

$L\ a = 0, 5024975$

Problema 4.

§. 15. *Si cognita ſupponantur bina loca Cometae vel Planetae in orbita ſua, eiusdemque orbitae ſemiaxis maior, reliqua orbitae Elementa inueſtigare.*

Denominationibus ſupra adhibitis in ſubſidium vocatis, conſequimur

$$c(1 + e\ \text{coſ.}\ \Phi) = c'(1 + e\ \text{coſ.}\ \Phi'),$$

vnde colligitur

$$e = \frac{c' - c}{c\ \text{coſ.}\ \Phi - c'\ \text{coſ.}\ \Phi'};\ \text{hinc}$$

$$c(1 + e\ \text{coſ.}\ \Phi) = \frac{c(c\ \text{coſ.}\ \Phi - c'\ \text{coſ.}\ \Phi' + c'\ \text{coſ.}\ \Phi - c\ \text{coſ.}\ \Phi)}{c\ \text{coſ.}\ \Phi - c'\ \text{coſ.}\ \Phi'}$$

$$= \frac{c c'(\text{coſ.}\ \Phi - \text{coſ.}\ \Phi')}{c\ \text{coſ.}\ \Phi - c'\ \text{coſ.}\ \Phi'} = b = a(1 - e^2);$$

fiet igitur

$$\frac{c\,c'\,(\cos\Phi - \cos\Phi')}{a\,(c\cos\Phi - c'\cos\Phi')} = 1 - e^2 = 1 - \frac{(c' - c)^2}{(c\cos\Phi - c'\cos\Phi')^2},$$

ideoque multiplicatione per $(c \cos\Phi - c' \cos\Phi')^2$ inſtituta:

$$\frac{c\,c'}{a}(\cos\Phi - \cos\Phi')(c\cos\Phi - c'\cos\Phi')$$
$$= (c\cos\Phi - c'\cos\Phi')^2 - (c' - c)^2,$$

quae aequatio in hanc euoluitur:

$$\frac{c\,c'}{a}(c\cos\Phi^2 - (c + c')\cos\Phi\cos\Phi' + c'\cos\Phi'^2)$$
$$= 2\,c\,c'(1 - \cos\Phi\cos\Phi') - c^2\sin\Phi^2 - c'^2\sin\Phi'^2,$$

ſiue quod eodem redit in iſtam:

$$\frac{c\,c'}{a}((c + c')(1 - \cos\Phi\cos\Phi') - c\sin\Phi^2 - c'\sin\Phi'^2)$$
$$= 2\,c\,c'(1 - \cos\Phi\cos\Phi') - c^2\sin\Phi^2 - c'^2\sin\Phi'^2.$$

Ponamus nunc eſſe $\Phi' + \Phi = \varepsilon$ et $\Phi' - \Phi = \delta$, erit

$$\cos\Phi\cos\Phi' = \tfrac{1}{2}\cos\delta - \tfrac{1}{2}\cos\varepsilon,$$

tumque

$$\sin\Phi^2 = \frac{1 - \cos 2\Phi}{2} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos(\varepsilon - \delta) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}(\cos\varepsilon\cos\delta + \sin\varepsilon\sin\delta)$$

et

$$\sin\Phi'^2 = \frac{1 - \cos 2\Phi'}{2} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos(\varepsilon + \delta) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}(\cos\varepsilon\cos\delta - \sin\varepsilon\sin\delta).$$

Quum igitur per ſuperius inuenta ſit:

$$2\,c\,c'\left(\frac{c + c'}{a} - 2\right)(1 - \cos\Phi\cos\Phi') - 2\,c^2\left(\frac{c'}{a} - 1\right)\sin\Phi^2$$
$$- 2\,c'^2\left(\frac{c}{a} - 1\right)\sin\Phi'^2 = 0,$$

pro $\cos\Phi$, $\cos\Phi'$, $\sin\Phi^2$ et $\sin\Phi'^2$ ſuffectis eorum valoribus, ad hanc pertingemus aequationem:

$$c\,c'\left(\frac{c + c'}{a} - 2\right)(2 - \cos\delta - \cos\varepsilon)$$
$$- c^2\left(\frac{c'}{a} - 1\right)(1 - \cos\varepsilon\cos\delta - \sin\varepsilon\sin\delta)$$
$$- c'^2\left(\frac{c}{a} - 1\right)(1 - \cos\varepsilon\cos\delta + \sin\varepsilon\sin\delta) = 0.$$

Ex hac autem aequatione deducitur,

$(c' - c)$

$$(c' - c)(a(c' + c) - c c') \text{ſin.}\, \varepsilon\, \text{ſin.}\, \delta$$
$$- c^2 (c' - a)(1 - \text{coſ.}\,\delta\, \text{coſ.}\,\varepsilon) - c'^2 (c - a)(1 - \text{coſ.}\,\varepsilon\, \text{coſ.}\,\delta)$$
$$+ c c' (c + c' - 2a)(2 - \text{coſ.}\,\delta - \text{coſ.}\,\varepsilon) = 0$$

Iam ſi ad hanc aequationem ſimul addatur et inde ſubtrahatur

$$c c' (c + c' - 2a)(1 - \text{coſ.}\,\varepsilon\, \text{coſ.}\,\delta),$$

erunt termini per $(1 - \text{coſ.}\,\varepsilon\, \text{coſ.}\,\delta)$ multiplicati

$$- c^2 (c' + a)(1 - \text{coſ.}\,\varepsilon\, \text{coſ.}\,\delta) - c'^2 (c + a)(1 - \text{coſ.}\,\varepsilon\, \text{coſ.}\,\delta)$$
$$+ c c' (c + c' - 2a)(1 - \text{coſ.}\,\varepsilon\, \text{coſ.}\,\delta),$$

qui ergo contrahuntur in iſtum terminum

$$+ a (c' - c)^2 (1 - \text{coſ.}\,\delta\, \text{coſ.}\,\varepsilon),$$

deinde reliqui termini erunt

$$c c' (c + c' - 2a)(2 - \text{coſ.}\,\delta - \text{coſ.}\,\varepsilon - 1 + \text{coſ.}\,\varepsilon\, \text{coſ.}\,\delta)$$
$$= c c' (c + c' - 2a)(1 - \text{coſ.}\,\delta)(1 - \text{coſ.}\,\varepsilon).$$

Hinc tota aequatio noſtra ſatis concinne hac ratione exprimetur:

$$(c' - c)(a(c' + c) - c c') \text{ſin.}\,\delta\, \text{ſin.}\,\varepsilon + a (c' - c)^2 (1 - \text{coſ.}\,\delta\, \text{coſ.}\,\varepsilon)$$
$$- c c' (2a - c' - c)(1 - \text{coſ.}\,\delta)(1 - \text{coſ.}\,\varepsilon) = 0,$$

ex qua iam dato angulo δ, angulus ε inueſtigari poteſt et viciſſim.

§. 16. Hunc in finem aequatio noſtra ita euoluatur, vt illi termini ſeorſim tractentur qui incognitum angulum δ continent, quo facto erit

$$(c' - c)(a(c' + c) - c c') \text{ſin.}\,\delta\, \text{ſin.}\,\varepsilon - a (c' - c)^2 \text{coſ.}\,\varepsilon\, \text{coſ.}\,\delta$$
$$+ 2 c c' (2a - c' - c) \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2}\varepsilon^2\, \text{coſ.}\,\delta + a (c' - c)^2$$
$$- 2 c c' (2a - c - c') \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 = 0.$$

 Nunc

Nunc quaeratur angulus β vt ſit

$$\frac{(c'-c)\,(a(c'+c)-cc')\,\text{ſin.}\,\varepsilon}{2cc'(2a-c'-c)\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\varepsilon^2-a(c'-c)^2\,\text{coſ.}\,\varepsilon}=\text{tang.}\,\beta \text{ et}$$

$$M=\frac{2cc'(2a-c-c')\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\varepsilon^2-a(c'-c)^2}{acc'(2a-c-c')\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\varepsilon^2-a(c'-c)^2\,\text{coſ.}\,\varepsilon},$$

eritque

$$\text{tang.}\,\beta\,\text{ſin.}\,\delta+\text{coſ.}\,\delta=M, \text{ hincque}$$
$$\text{coſ.}\,(\delta-\beta)=M\,\text{coſ.}\,\beta,$$

hinc quum detur M coſ. β, cognoſcetur coſ. $(\delta-\beta)$, ex quo ob cognitum angulum β, dabitur angulus δ.

§. 17. Quum in ſuperioribus ſit

$$2cc'(c+c'-2a)(1-\text{coſ.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi')-2c^2(c'-a)\,\text{ſin.}\,\Phi^2$$
$$-2c'^2(c-a)\,\text{ſin.}\,\Phi'^2=0, \text{ ob}$$

$$2\,\text{ſin.}\,\Phi^2=1-\text{coſ.}\,2\Phi;\ 2\,\text{ſin.}\,\Phi'^2=1-\text{coſ.}\,2\Phi',$$

fiet

$$2cc'(c+c'-2a)(1-\text{coſ.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi')$$
$$-c^2(c'-a)(1-\text{coſ.}\,2\Phi)-2c'^2(c-a)(1-\text{coſ.}\,2\Phi'),$$

tumque quum ſit $\Phi'=\varepsilon-\Phi$, erit

$$\text{coſ.}\,\Phi'=\text{coſ.}\,\varepsilon\,\text{coſ.}\,\Phi+\text{ſin.}\,\varepsilon\,\text{ſin.}\,\Phi \text{ et}$$
$$\text{coſ.}\,2\Phi'=\text{coſ.}\,2\varepsilon\,\text{coſ.}\,2\Phi+\text{ſin.}\,2\varepsilon\,\text{ſin.}\,2\Phi,$$

hinc prodibit iſta aequatio:

$$0=2cc'(c+c'-2a)(1-\text{coſ.}\,\varepsilon\,\text{coſ.}\,\Phi^2-\text{ſin.}\,\varepsilon\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi)$$
$$-c^2(c'-a)(1-\text{coſ.}\,2\Phi)-c'^2(c-a)(1-\text{coſ.}\,2\varepsilon\,\text{coſ.}\,2\Phi-\text{ſin.}\,2\varepsilon\,\text{ſin.}\,2\Phi),$$

tum vero ob

2 coſ.

$$2\,\text{coſ.}\,\Phi^2 = 1 - \text{coſ.}\,2\,\Phi, \text{ et } 2\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi = \text{ſin.}\,2\,\Phi,$$

haec aequatio ita transformabitur:

$$cc'(c+c'-2a)(2-\text{coſ.}\,\varepsilon - \text{coſ.}\,\varepsilon\,\text{coſ.}\,2\,\Phi - \text{ſin.}\,\varepsilon\,\text{ſin.}\,2\,\Phi)$$
$$-c^2(c'-a)(1-\text{coſ.}\,2\,\Phi)$$
$$-c'^2(c-a)(1-\text{coſ.}\,2\,\varepsilon\,\text{coſ.}\,2\,\Phi - \text{ſin.}\,2\,\varepsilon\,\text{ſin.}\,2\,\Phi) = 0,$$

cuius aequationis ope nunc quidem angulus Φ inueſtigari poteſt, interim tamen aequatio ſupra allata pro hoc inſtituto commodior eſſe videtur. Denique ſubſidio aequationis §. 8. allatae, quae ob $e^2 = 1 - \frac{b}{a}$ in hanc abit:

$$(1-\tfrac{b}{a})\,\text{ſin.}\,2\,\delta^2 = b^2\left(\tfrac{1}{c^2} - \tfrac{2\,\text{coſ.}\,2\,\delta}{cc'} + \tfrac{1}{c'^2}\right)$$
$$-2b\left(\tfrac{1}{c}+\tfrac{1}{c'}\right)(1-\text{coſ.}\,2\,\delta) + 2\,(1-\text{coſ.}\,2\,\delta),$$

valor ipſius b inueſtigari poteſt, quod tamen non niſi operoſo aliquantum labore praeſtabitur.

§. 18. Nunc igitur reſtat vt vſum formulae noſtrae §. 16. allatae, exemplo illuſtremus. Supponamus itaque eſſe:

$$c' = 1,0738911,\quad c = 0,6871881,\quad a = 3,3019276$$

et angulum $\varepsilon = 95°, 49'. 38''$.

$c' =$	1,0738911	$L(c'+c) =$	0,2457789
$c =$	0,6871881	$La =$	0,5187675
$c'+c =$	1,7610792	$La(c'+c) =$	0,7645464
$c'-c =$	0,3867030	$a(c'+c) =$	5,8149554
$2a =$	6,6038552	$Lc' =$	0,0309603
$2a-c'-c =$	4,8427760	$Lc =$	9,8370756
		$Lc'c =$	9,8680359
		$L.\,2a-c-c' =$	0,6850943
		$Lcc'(2a-c-c') =$	0,5531302

$La =$

$$L\,a = 0{,}5187675$$
$$L\,(c' - c)^2 = 9{,}1747552$$
$$L\,a\,(c' - c)^2 = 9{,}6935227$$

$$a\,(c' + c) = 5{,}8149554$$
$$c\,c' = 0{,}7379650$$
$$a(c' + c) - c\,c' = 5{,}0769904$$

$$2\,c\,c'\,(2\,a - c - c')\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\varepsilon^2 = A$$

$$a\,(c' - c)^2\,\text{coſ.}\,\varepsilon = C$$
$$a\,(c' - c)^2 = D$$
$$A = 3{,}9366445$$
$$D = 0{,}4937677$$
$$A - D = 3{,}4428768$$

$$A = 3{,}9366445$$
$$C = -\,0{,}0501317$$
$$A - C = 3{,}9867762$$

$$L\,(A - D) = 0{,}5369215$$
$$L\,(A - C) = 0{,}6006218$$
$$L\,M = 9{,}9362997$$
$$L\,\text{coſ.}\,\beta = 9{,}9532877$$
$$L\,\text{coſ.}(\delta - \beta) = 9{,}8895874$$

$$L\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\varepsilon = 9{,}8704830$$
$$L\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\varepsilon^2 = 9{,}7409660$$
$$L\,2 = 0{,}3010300$$
$$L\,c\,c'\,(2\,a - c - c') = 0{,}5531302$$
$$L\,2\,c\,c'\,(2a - c - c')\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\varepsilon^2 = 0{,}5951262$$

$$L\,a\,(c' - c)^2 = 9{,}6935227$$
$$L\,\text{coſ.}\,\varepsilon = 9{,}0065899$$
$$L\,a\,(c' - c)^2\,\text{coſ.}\,\varepsilon = 8{,}7001126$$

$$L\,a\,(c' + c) - c\,c' = 0{,}7056064$$
$$L\,(c' - c) = 9{,}5873776$$
$$L\,\text{ſin.}\,\varepsilon = 9{,}9977500$$
$$L.B = 0{,}2907340$$
$$L\,(A - C) = 0{,}6006218$$
$$L\,\text{tang.}\,\beta = 9{,}6901122$$

$$\beta = 26^\circ.\ 6'.\ 1'',91$$
$$\delta - \beta = 39.\ 8.\ 55,\ 35$$
$$\delta = 65.\ 14.\ 57,\ 26$$
$$\varepsilon = 95.\ 49.\ 38$$
$$\varepsilon + \delta = 161.\ 4.\ 35,\ 26$$
$$\varepsilon - \delta = 30.\ 34.\ 40,\ 74$$

$$\Phi' = 80.\ 32.\ 17,\ 63$$
$$\Phi = 15.\ 17.\ 20,\ 37$$

§. 19.

§. 19. Nunc pro inueſtiganda excentricitate in ſubſidium vocare licebit formulam $e = \frac{c' - c}{c\ coſ.\ \Phi - c'\ coſ.\ \Phi'}$.

L. c = 9, 8370756	L. c' = 0, 0309603
L. coſ. Φ = 9, 9843509	L. coſ. Φ' = 9, 2158740
L. c coſ. Φ = 9, 8214265	L. c' coſ. Φ' = 9, 2468343
c coſ. Φ = 0, 6628671	L. $(c' - c)$ = 9, 5873776
c' coſ. Φ' = 0, 1765364	L. (c coſ. Φ - c' coſ. Φ') = 9, 6869317
c coſ. Φ - c' coſ. Φ' = 0, 4863307	L. e = 9, 9004459
$1 + e$ coſ. Φ = 1, 7670025	L. coſ. Φ = 9, 9843509
	L. e coſ. Φ = 9, 8847968
L. c = 9, 8370756	L. $(1 + e)$ = 0, 2540987
L. $(1 + e$ coſ. $\Phi)$ = 0, 2472371	L. $(1 - e)$ = 9, 3114483
L. b = 0, 0843127	L. $(1 - e^2)$ = 9, 5655470
L. $(1 + e)$ = 0, 2540987	L. b = 0, 0843127
L. d = 9, 8302140	L. a = 0, 5187657

Quum igitur valor pro *a* inuentus, cum eo ſatis bene congruat, quem in calculo ſuppoſuimus, id indicio eſt computum bene eſſe inſtitutum.

§. 20. Problematibus modo allatis, quae potiſſimum quidem occurrere ſolent, propter affinitatem materiae adhuc bina adiiciemus, licet inueſtigatio orbitarum pro Planetis vel Cometis, rarius ad eadem perducere ſoleat.

Problema 5.

Si cognitis binis Planetae vel Cometae locis Heliocentricis, inſuper detur ſemiaxis coniugatus orbitae in qua Aſtrum motum ſuum perficit, indolem huius orbitae indagare.

Si denominationes ſupra adhibitae retineantur, ſemiaxis autem coniungatus orbitae per f indigitetur, erit vti ex doctrina Sectionum Conicarum conſtat: $b = f\sqrt{(1-e^2)}$, Quum igitur ſupra §. 15. inuenerimus:

$$\frac{c c' (\text{coſ.}\,\Phi - \text{coſ.}\,\Phi')}{c\,\text{coſ.}\,\Phi - c'\,\text{coſ.}\,\Phi'} = b = f\sqrt{(1-e^2)} \text{ et } e = \frac{c'-c}{c\,\text{coſ.}\,\Phi - c'\,\text{coſ.}\,\Phi'},$$

erit quadratis vtrinque ſumtis:

$$c^2 c'^2 (\text{coſ.}\,\Phi - \text{coſ.}\,\Phi')^2 = f^2 (c\,\text{coſ.}\,\Phi - c'\,\text{coſ.}\,\Phi')^2 - f^2 (c'-c)^2$$

quae aequatio euolutione facta ita erit comparata:

$$\frac{c^2 c'^2}{f^2} (\text{coſ.}\,\Phi^2 - 2\,\text{coſ.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi' + \text{coſ.}\,\Phi'^2)$$
$$= + 2cc' (1 - \text{coſ.}\,\Phi'\,\text{coſ.}\,\Phi) - c^2\,\text{ſin.}\,\Phi^2 - c'^2\,\text{ſin.}\,\Phi'^2,$$

vnde iterum iſthaec deducitur,

$$2\left(1 - \frac{f^2}{cc'}\right)(1 - \text{coſ.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi') - \left(1 - \frac{f^2}{c'^2}\right)\text{ſin.}\,\Phi^2$$
$$- \left(1 - \frac{f^2}{c^2}\right)\text{ſin.}\,\Phi'^2 = 0.$$

Si igitur vti in antecedentibus, ſtatuatur $\Phi' + \Phi = \varepsilon$ et $\Phi' - \Phi = \delta$, fiet

$$2\,\text{coſ.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi' = \text{coſ.}\,\delta + \text{coſ.}\,\varepsilon, \text{ tumque}$$
$$2\,\text{ſin.}\,\Phi^2 = 1 - \text{coſ.}\,\varepsilon\,\text{coſ.}\,\delta - \text{ſin.}\,\varepsilon\,\text{ſin.}\,\delta;$$
$$2\,\text{ſin.}\,\Phi'^2 = 1 - \text{coſ.}\,\varepsilon\,\text{coſ.}\,\delta + \text{ſin.}\,\varepsilon\,\text{ſin.}\,\delta,$$

his igitur valoribus ſubſtitutis noſtra aequatio in ſequentem abibit:

$$2\left(1 - \frac{f^2}{cc'}\right)(2 - \text{coſ.}\,\delta - \text{coſ.}\,\varepsilon) - \left(1 - \frac{f^2}{c'^2}\right)(1 - \text{coſ.}\,\varepsilon\,\text{coſ.}\,\delta - \text{ſin.}\,\varepsilon\,\text{ſin.}\,\delta)$$
$$\left(1 - \frac{f^2}{c^2}\right)(1 - \text{coſ.}\,\varepsilon\,\text{coſ.}\,\delta + \text{ſin.}\,\varepsilon\,\text{ſin.}\,\delta) = 0,$$

quae etiam ſequenti modo repraeſentari poteſt:

$$0 = f^2\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{c'^2}\right)\text{ſin.}\,\varepsilon\,\text{ſin.}\,\delta + 2\left(1 - \frac{f^2}{cc'}\right)(1 - \text{coſ.}\,\delta)(1 - \text{coſ.}\,\varepsilon)$$
$$- \left(1 - \frac{f^2}{c'^2}\right)(1 - \text{coſ.}\,\varepsilon\,\text{coſ.}\,\delta) - \left(1 - \frac{f^2}{c^2}\right)(1 - \text{coſ.}\,\varepsilon\,\text{coſ.}\,\delta)$$
$$+ 2\left(1 - \frac{f^2}{cc'}\right)(1 - \text{coſ.}\,\varepsilon\,\text{coſ.}\,\delta),$$

vnde

vnde demum habetur

$$(c'^2 - c^2)\,\text{ſin.}\,\varepsilon\,\text{ſin.}\,\delta + (c' - c)^2 (1 - \text{coſ.}\,\varepsilon\,\text{coſ.}\,\delta)$$
$$+ 2cc'\left(\frac{cc'}{f^2} - 1\right)(1 - \text{coſ.}\,\delta)(1 - \text{coſ.}\,\varepsilon) = 0.$$

Huius igitur aequationis ope, cognito angulo δ, angulus ε facile determinabitur.

§. 21. Ad aequationem modo allatam facile quoque pertingere licebit, ſi perpendatur aequationem §. adductam ſub huiusmodi forma repraeſentari poſſe:

$$-(c' - c)\,\text{ſin}\,\delta\,\text{ſin.}\,\varepsilon + (c + c')(1 - \text{coſ.}\,\delta)(1 - \text{coſ.}\,\varepsilon)$$
$$= \frac{2cc'}{b}(1 - \text{coſ.}\,\delta)(1 - \text{coſ.}\,\varepsilon),$$

ſi igitur haec aequatio multiplicetur per cc' et ſubtrahatur ab aequatione finali §. 15. allata, reſiduum dabit:

$$a(c' + c)(c' - c)\,\text{ſin.}\,\delta\,\text{ſin.}\,\varepsilon + a(c' - c)^2 (1 - \text{coſ.}\,\delta\,\text{coſ.}\,\varepsilon)$$
$$- 2cc'\left(a - \frac{cc'}{b}\right)(1 - \text{coſ.}\,\delta)(1 - \text{coſ.}\,\varepsilon) = 0,$$

vnde ob $ab = f^2$, aequatio §. praecedenti allata ſtatim elicitur. Caeterum ſi cui volupe fuerit, loco anguli ε, altervtrum angulorum Φ vel Φ', vel potius eorum dupla inueſtigare, haud obſcurum eſſe poterit, quomodo in ſubſidium vocata aequatione:

$$2\left(1 - \frac{f^2}{cc'}\right)(1 - \text{coſ.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi') - \left(1 - \frac{f^2}{c'^2}\right)\text{ſin.}\,\Phi^2$$
$$- \left(1 - \frac{f^2}{c^2}\right)\text{ſin.}\,\Phi'^2 = 0,$$

iſtud negotium facile perficiatur.

Problema 6.

§. 22. *Datis binis Planetae vel Cometae locis Heliocentricis et diſtantia focorum in orbita, inuenire reliqua Elementa eiusdem orbitae.*

In-

Indigitetur nunc ſemiſſis diſtantiae focorum per litteram g, eritque vti ex Conicis conſtat $g = \frac{be}{1-e^2}$. Quum igitur ſit

$$b = \frac{cc'(\text{coſ.}\,\Phi - \text{coſ.}\,\Phi')}{c\,\text{coſ.}\,\Phi - c'\,\text{coſ.}\,\Phi'} \quad \text{et} \quad e = \frac{c'-c}{c\,\text{coſ.}\,\Phi - c'\,\text{coſ.}\,\Phi'},$$

fiet his valoribus adhibitis

$$\frac{cc'}{g}(c'-c)(\text{coſ.}\,\Phi - \text{coſ.}\,\Phi') = (c\,\text{coſ.}\,\Phi - c'\,\text{coſ.}\,\Phi')^2 - (c'-c)^2$$

et facta euolutione:

$$\frac{cc'(c'-c)(\text{coſ.}\,\Phi - \text{coſ.}\,\Phi')}{g} = 2cc'(1 - \text{coſ.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi') \\ - c^2\,\text{ſin.}\,\Phi^2 - c'^2\,\text{ſin.}\,\Phi'^2.$$

Si nunc vt ſupra ſtatuatur $\Phi' + \Phi = \varepsilon$; $\Phi' - \Phi = \delta$ fiet

$$\frac{4cc'(c'-c)}{g}\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\varepsilon\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\delta = 2cc'(2 - \text{coſ.}\,\varepsilon - \text{coſ.}\,\delta) \\ - c^2(1 - \text{coſ.}\,\varepsilon\,\text{coſ.}\,\delta - \text{ſin.}\,\varepsilon\,\text{ſin.}\,\delta) \\ - c'^2(1 - \text{coſ.}\,\varepsilon\,\text{coſ.}\,\delta + \text{ſin.}\,\varepsilon\,\text{ſin.}\,\delta),$$

vnde colligitur

$$(c'^2 - c^2)\,\text{ſin.}\,\varepsilon\,\text{ſin.}\,\delta + (c'-c)^2(1 - \text{coſ.}\,\varepsilon\,\text{coſ.}\,\delta) \\ - 2cc'(1 - \text{coſ.}\,\varepsilon)(1 - \text{coſ.}\,\delta) \\ + \frac{4cc'(c'-c)}{g}\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\varepsilon\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\delta = 0.$$

Ad hanc autem aequationem etiam ope illius, quae §. 20. adhibita eſt, facile peruenietur; quum enim ſit

$$\frac{b}{e} = \frac{cc'(\text{coſ.}\,\Phi - \text{coſ.}\,\Phi')}{c'-c} = \frac{2cc'\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\varepsilon\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\delta}{c'-c};$$

tumque ſit $f^2 = \frac{b^2}{1-e^2}$ et $g = \frac{be}{1-e^2}$, erit $\frac{b}{e} = \frac{f^2}{g}$, hincque

$$\frac{c-c'}{g} = \frac{2cc'\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\varepsilon\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\delta}{f^2}.$$

Inde autem multiplicando vtrinque per $4cc'.\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\varepsilon\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\delta$, fiet

fiet $\frac{4cc'(c'-c)}{g}$ ſin. $\frac{1}{2}\varepsilon$ ſin. $\frac{1}{2}\delta = \frac{8c'^2c^2}{f^2}$ ſin. $\frac{1}{2}\varepsilon^2$ ſin. $\frac{1}{2}\delta^2$

$$= \frac{2c^2c'^2}{f^2}(1-\text{coſ.}\,\varepsilon)(1-\text{coſ.}\,\delta).$$

Quum igitur §. 20. inuenerimus:

$$(c'^2-c^2)\,\text{ſin.}\,\varepsilon\,\text{ſin.}\,\delta + (c'-c)^2(1-\text{coſ.}\,\varepsilon\,\text{coſ.}\,\delta)$$
$$+ 2cc'\left(\frac{cc'}{f^2}-1\right)(1-\text{coſ.}\,\delta)(1-\text{coſ.}\,\varepsilon) = 0,$$

inde colligitur vti ſupra habuimus:

$$(c'^2-c^2)\,\text{ſin.}\,\varepsilon\,\text{ſin.}\,\delta + (c'-c)^2(1-\text{coſ.}\,\varepsilon\,\text{coſ.}\,\delta)$$
$$-2cc'(1-\text{coſ.}\,\varepsilon)(1-\text{coſ.}\,\delta)$$
$$+\frac{4cc'(c'-c)}{g}\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\varepsilon\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\delta = 0,$$

cuius ope dato angulo ε, angulus δ inueſtigari debet.

§. 23. Facile autem perſpicitur aequationem huic negotio inſeruientem, ſi ad formam algebraicam reducatur, quarti eſſe gradus, ideoque quatuor omnino ſolutiones admittere, vbi tamen fieri poteſt, vt illarum ſolutionum non niſi binae ad valores deducant reales. Caeterum ita commodiſſime aequatio noſtra reſolui poſſe videtur, vt concipiamus eam exortam eſſe ex multiplicatione binarum huiusmodi expreſſionum:

$$\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\delta + m\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\delta + n = 0 \text{ et}$$
$$\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\delta + m'\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\delta + n' = 0.$$

Hinc enim orietur productum:

$$\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\delta^2 + (m+m')\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\delta\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\delta + mm'\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\delta^2$$
$$+(n+n')\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\delta + (mn'+m'n)\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\delta + nn' = 0,$$

ſiue ob

$$2\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\delta^2 = 1+\text{coſ.}\,\delta;\quad 2\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\delta^2 = 1-\text{coſ.}\,\delta;$$
$$2\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\delta\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\delta = \text{ſin.}\,\delta;$$

 1 +

$$1 + m m' + (1 - m m') \mathrm{cos.}\, \delta$$
$$+ (m + m') \mathrm{sin.}\, \delta + 2 (n + n') \mathrm{cos.} \tfrac{1}{2} \delta$$
$$+ 2 (m n' + m' n) \mathrm{sin.} \tfrac{1}{2} \delta + 2 n n' = 0.$$

Quum vero in aequatione propoſita nullibi occurrat coſ $\tfrac{1}{2}\delta$, ſtatim perſpicitur fore $n' = -n$, vnde illud productum hanc nanciſcetur formam:

$$(1 - m m') \mathrm{cos.}\, \delta + (m + m') \mathrm{sin.}\, \delta + 2 n (m' - m) \mathrm{sin.} \tfrac{1}{2} \delta$$
$$+ 1 + m m' - 2 n^2 = 0.$$

Quum igitur ex aequatione modo allata ſit:

$$\mathrm{sin.}\, \delta + \frac{2 c c' - (c'^2 + c^2) \mathrm{cos.}\, \varepsilon \; \mathrm{cos.}\, \delta}{(c'^2 - c^2) \mathrm{sin.}\, \varepsilon} + \frac{2 c c' . \mathrm{sin.} \tfrac{1}{2} \delta}{g (c' + c) \mathrm{cos.} \tfrac{1}{2} \varepsilon}$$
$$+ \frac{(c' - c)}{(c' + c) \mathrm{sin.}\, \varepsilon} - \frac{4 c c'}{c'^2 - c^2} \mathrm{tang.} \tfrac{1}{2} \varepsilon = 0,$$

hinc fiet

$$\frac{1 - m m'}{m + m'} = \frac{2 c c' - (c'^2 + c^2) \mathrm{cos.}\, \varepsilon}{(c'^2 - c^2) \mathrm{sin.}\, \varepsilon};$$
$$\frac{2 n (m' - m)}{m' + m} = \frac{2 c c'}{g (c' + c) \mathrm{cos.} \tfrac{1}{2} \varepsilon}$$
$$\frac{1 + m m' - 2 n^2}{m' + m} = \frac{c' - c}{(c' + c) \mathrm{sin.}\, \varepsilon} - \frac{4 c c'}{c'^2 - c^2} \mathrm{tang.} \tfrac{1}{2} \varepsilon,$$

quarum aequalitatum ope, quantitates incognitae m, m', n determinandae ſunt.

§. 24. Breuitatis gratia deſignentur quantitates datae:

$$\frac{2 c c' - (c'^2 + c^2) \mathrm{cos.}\, \varepsilon}{(c'^2 - c^2) \mathrm{sin.}\, \varepsilon}; \quad \frac{2 c c'}{g (c' + c) \mathrm{cos.} \tfrac{1}{2} \varepsilon};$$

$$\frac{c' - c}{(c' + c) \mathrm{sin.}\, \varepsilon} - \frac{4 c c'}{c'^2 - c^2} \mathrm{tang.} \tfrac{1}{2} \varepsilon$$

re-

reſpectiue per litteras λ, 2 μ, ν eritque:

$$\frac{1-mm'}{m+m'}=\lambda;\ \frac{n(m'-m)}{m'+m}=\mu;\ \frac{1+mm'-2n^2}{m'+m}=\nu;$$

hinc ſi ad primam harum aequationum addatur vltima prodibit:

$$2(1-n^2)=(\lambda+\nu)(m'+m),\ \text{hinc}\ n^2=1-(\lambda+\nu)\frac{(m'+m)}{2},$$

at ex aequalitate ſecunda eſt

$$n^2=\frac{\mu^2(m'+m)^2}{(m'-m)^2},\ \text{hincque fit}$$

$$\frac{\mu^2(m'+m)^2}{(m'-m)^2}=1-(\lambda+\nu)\frac{(m'+m)}{2};$$

et quum ſit

$$m'm=\tfrac{1}{4}(m'+m)^2-\tfrac{1}{4}(m'-m)^2$$

hoc valore in aequatione prima ſubſtituto, erit

$$4-(m'+m)^2+(m'-m)^2=4\lambda(m+m'),$$

ideoque

$$4+(m'-m)^2=(m'+m)^2+4\lambda(m+m'),$$

at in ſuperioribus erat

$$\frac{(m'-m)^2}{\mu^2}=(m'+m)^2+\frac{(\lambda+\nu)(m'-m)^2}{2\mu^2}(m'+m),$$

hinc demum colligitur

$$(m+m')\left(4\lambda-\frac{(\lambda+\nu)(m'-m)^2}{2\mu^2}\right)=4+(m'-m)^2\left(1-\frac{1}{\mu^2}\right),$$

et ſubſtituto valore ipſius $m+m'$, prodibit aequatio tertii gradus, quae ſolam incognitam $m'-m$ inuoluit. Concinnius autem ad huiusmodi aequationem ſequenti ratione perueniemus: quum ſit

$$4m'm=(m'+m)^2-(m'-m)^2\ \text{erit}$$

$$4-4mm'=4-(m'+m)^2+(m'-m)^2=4\lambda(m'+m),$$

deinde ob $m'-m=\frac{\mu(m'+m)}{n}$, hoc valore ſubſtituto, colligitur:

$$4 - (m' + m)^2 + \frac{\mu^2 (m' + m)^2}{n^2} = 4\lambda (m' + m),$$

hincque

$$\mu^2 (m' + m)^2 + n^2 (4 - (m' + m)^2 - 4\lambda (m' + m)) = 0,$$

atqui ob

$$2(1 - n^2) = (\lambda + \nu)(m' + m), \text{ erit } n^2 = 1 - \frac{(\lambda + \nu)}{2}(m' + m),$$

vnde demum fiet

$$\mu^2 (m' + m)^2 + \left(1 - \frac{(\lambda + \nu)}{2}(m' + m)\right)(4 - (m' + m)^2 - 4\lambda (m' + m)) = 0,$$

quae euoluta praebet:

$$\left(\frac{\lambda + \nu}{2}\right)(m' + m)^3 + (m' + m)^2 (\mu^2 - 1 + 2\lambda(\lambda + \nu))$$
$$- (m' + m)(6\lambda + 2\nu) + 4 = 0,$$

ſiue poſito $\frac{m' + m}{2} = q$;

$$(\lambda + \nu) q^3 + q^2 (\mu^2 - 1 + 2\lambda(\lambda + \nu)) - q(\tfrac{3}{2}\lambda + \nu) + 1 = 0,$$

cuius tamen aequationis reſolutionem vlterius proſequi inutile foret.

§. 25. Quemadmodum reſolutio Problematis vltimo loco allati, per reſolutionem aequationis biquadraticae abſoluitur, ita facile perſpicitur reliquorum Problematum ſolutiones, in terminis Algebraicis expreſſas ad aequationes quadraticas reduci; ideoque ſingulas harum ſolutionum duplices dari, quas quemadmodum comparatas eſſe oportet, nunc accuratius expendere haud inutile erit, quum id in praecedentibus plane ſit praetermiſſum. Quod igitur attinet problema Primum, ſtatim patet pro angulo $\frac{1}{2}(\Phi' + \Phi)$ duplicem emergere valorem ex formula

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2}(\Phi' + \Phi) = \text{cot.} \tfrac{1}{2}(\Phi' - \Phi) . \frac{h(c' - c)}{h(c' + c) - 2cc'},$$

ſi

ſi enim ponatur

$$\text{tang.}\,\zeta = \text{cot.}\,\tfrac{1}{2}(\Phi' - \Phi)\,\frac{b(c'-c)}{b(c'+c)-2cc'},$$

erit $\frac{1}{2}(\Phi' + \Phi)$ vel $= \zeta$, vel $= 180 + \zeta$, pro exemplo §. 5. allato priorem iam conſiderauimus ſolutionem, pro altera autem erit:

$$\tfrac{1}{2}(\Phi' + \Phi) = 217^\circ.\ 7'.12'',3; \text{ hinc } \Phi' = 261^\circ.58'.46'',3$$
$$\tfrac{1}{2}(\Phi' - \Phi) = 44.\ 51.\ 34. \qquad \Phi = 172.\ 15.\ 38,\ 3$$

valor autem pro e hinc deducendus cum priori prorſus conſentit, niſi quod negatiuum accipiat valorem, quod indicat angulos anomaliarum ab Aphelio eſſe computatos, ideoque haec ſolutio a priori nihil prorſus diſcrepat.

§. 26. In Problemate autem ſecundo, dum inuentus fuerit $-\text{coſ.}(\varepsilon + \eta) = \frac{\text{coſ.}\,\eta}{e\,\text{coſ.}\,\delta}$, ſi ſtatuatur coſ. $\zeta = \frac{\text{coſ.}\,\eta}{e\,\text{coſ.}\,\delta}$, erit $\varepsilon + \eta$ vel $= 180 - \zeta$, vel $= 180 + \zeta$, in exemplo §. 9. allato priorem horum caſuum contemplauimus, pro poſteriori vero erit:

$\varepsilon + \eta = 247.\ 17.\ 39,\ 2$	L. $e = 9,9500000$
$\eta = 75.\ 51.\ 11,\ 6$	L. coſ. $\Phi' = 9,9070170$
$\varepsilon = 171.\ 26.\ 27,\ 6$	L. e coſ. $\Phi' = 9,8570170$
$\delta = 44.\ 43.\ 45,\ 5$	e coſ. $\Phi' = -0,7194772$
$\Phi' = 216.\ 10.\ 13,\ 1$	$1 + e$ coſ. $\Phi' = +0,2805228$
$\Phi = 126.\ 42.\ 42,\ 1$	L. $c' = 0,0476478$
	L. $(1 + e$ coſ. $\Phi) = 9,4479681$
	L. $b = 9,4956159$

haec igitur ſolutio a priori prorſus diuerſa eſt. Quod Problema Tertium attinet, binae ſolutiones illi ſatisfacientes ad eandem reducuntur, id quod ex valore pro tang. $\frac{1}{2}(\Phi' + \Phi)$

 mox

mox patet; verum de valore quem ibi pro excentricitate attulimus, vix obuium eſſe poterit, eundem non niſi vnicam admittere determinationem. Perſpicuum autem idem mox fiet, ſi quaeramus valorem ipſius $\frac{e}{b}$ ope formulae

$$\left(\tfrac{1}{d}-\tfrac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{1-\text{coſ.}\,\Phi}\right)=\frac{e}{b},\ \text{ſiue}\ \frac{b}{e}=\frac{1-\text{coſ.}\,\Phi}{\frac{1}{d}-\frac{1}{c}}.$$

Quum enim eſſet

$$\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\Phi=\frac{\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\alpha'}{\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\alpha\ \text{ſin.}\,\delta}-\text{cot.}\,\delta,\ \text{fiet}$$

$$\frac{\text{cot.}\,\frac{1}{2}\Phi^2-1}{\text{cot.}\,\frac{1}{2}\Phi^2+1}=\text{coſ.}\,\Phi=\frac{\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\alpha'^2-2\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\alpha'\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\alpha\,\text{coſ.}\,\delta+\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\alpha^2\,\text{coſ.}\,2\delta}{\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\alpha'^2-2\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\alpha'\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\alpha\,\text{coſ.}\,\delta+\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\alpha^2},$$

hinc

$$1-\text{coſ.}\,\Phi=\frac{\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\alpha^2(1-\text{coſ.}\,2\delta)}{\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\alpha'^2-2\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\alpha'\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\alpha\,\text{coſ.}\,\delta+\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\alpha^2},$$

hinc ob

$$\tfrac{1}{d}-\tfrac{1}{c}=\tfrac{1}{d}\left(1-\tfrac{d}{c}\right)=\tfrac{1}{d}(1-\text{coſ.}\,\alpha)=\frac{2\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\alpha^2}{d},\ \text{fiet}$$

$$\frac{e}{b}=\tfrac{1}{d}\left(1-\tfrac{d}{c}\right)\left(\frac{1}{1-\text{coſ.}\,\Phi}\right)$$

$$=\frac{2}{d}\,\frac{(\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\alpha'^2-2\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\alpha\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\alpha'\,\text{coſ.}\,\delta+\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\alpha^2)}{1-\text{coſ.}\,2\delta}.$$

Inuento igitur per hanc aequationem $\frac{e}{b}$, ob $\frac{1}{b}=\frac{1}{d}-\frac{e}{b}$, innoteſcet quoque $\frac{1}{b}$.

§. 27. Problema Quartum binas iterum admittit ſolutiones, quum enim inuentus ſit $\text{coſ.}(\delta-\beta)=M\,\text{coſ.}\,\beta$, ſi ponatur $M\,\text{coſ.}\,\beta=\text{coſ.}\,\mu$, erit $\delta-\beta$ vel $=\mu$, vel $=-\mu$, priorem caſum in exemplo §. 18. allato conſiderauimus. Verum enimuero ſi ponatur:

$\beta-$

$\beta - \delta = 39^\circ.\ 8'.55''.35$
ob $\beta = 26.\ 6.\ 1,\ 91$
fiet $\delta = -13.\ 2.\ 53,\ 44$
$\varepsilon = 95.\ 49.\ 38,\ 00$

$\varepsilon + \delta = 82.\ 46.\ 44,\ 56$
$\varepsilon - \delta = 108.\ 52.\ 31,\ 44$
$\Phi' = 41.\ 23.\ 22,\ 28$
$\Phi = 54.\ 26.\ 15,\ 72$

L. $e = 9,9788434$
L. coſ. $\Phi = 9,7646151$
L. coſ. $\Phi' = 9,8751957$

L. e coſ. $\Phi = 9,7434585$
L. e coſ. $\Phi' = 9,8540391$

L. $c = 9,8370756$
L. $(1 + e$ coſ. $\Phi) = 9,6493986$

L. $b = 9,4864742$

L. $c = 9,8370756$
L. coſ. $\Phi = 9,7646151$

L. c coſ. $\Phi = 9,6010907$

L. $c' = 0,0309603$
L. coſ. $\Phi' = 9,8751957$

L. c' coſ. $\Phi' = 9,9061560$

c' coſ. $\Phi' = 0,8056676$
c coſ. $\Phi = 0,3996600$

$0,4060076$

L. $(c' - c) = 9,5873776$
L. $(c'$ coſ. $\Phi' - c$ coſ. $\Phi) = 9,6085342$

L. $e = 9,9788434$

L. $c' = 0,0309603$
L. $(1 + e$ coſ. $\Phi') = 9,4555137$

L. $b = 9,4864740$

L. $(1 + e) = 8,6771286$
L. $(1 - e) = 0,2905804$

$8,9677090$
L. $a = 0,5187650$

Denique Problema Quintum quoque binas ſuppeditabit ſolutiones, quippe quum in hoc Problemate aequatio determinando angulo δ inſeruiens eiusdem plane ſit formae, ac illa, qua hic angulus in Problemate Quarto determinatur.

§. 28.

§. 28. Praeter Problemata modo commemorata, varia quoque alia tradi poſſunt, quorum ſolutiones cum praecedentibus affinitatem quandam habent. Ex hoc genere iſtud eſt Problema, quo quaeritur orbita Cometae vel Planetae per bina eius loca data tranſiens, et in qua ſemiparameter per excentricitatem diuiſa cognita habetur, cuius omnino facilis eſt ſolutio per formulam §. 22. traditam, qua erat $\frac{b}{e} = \frac{2\,c\,c' \text{ ſin. } \frac{1}{2}\delta \text{ ſin. } \frac{1}{2}\varepsilon}{c' - c}$. Verum quum hoc et alia eiusdem generis Problemata vix vnquam in Aſtronomia occurrere ſoleant, invtile eſſet iisdem vlterius explicandis, operam impendere. Multo autem maiorem attentionem meretur Problema, quo ex datis binis Planetae vel Cometae locis Heliocentricis, et dato temporis interuallo inter momenta quo Aſtrum in his locis verſatum fuerit, quaeritur vera eiusdem Aſtri orbita. At tamen ſiquidem in genere ſupponatur hanc orbitam ad Sectiones Conicas pertinere et ſpeciatim inter Ellipſes referendam eſſe; notum eſt, tempus quod dato angulo anomaliae reſpondet, non niſi tranſcendenter ope huius anomaliae determinari, vnde reſolutio huius Problematis non niſi per ſeries infinitas praeſtari poterit.

§. 29. Occaſione data nunc quoque ſolutiones Geometricas nonnullorum Problematum in ſuperioribus propoſitorum adiungere placet, quippe quod huic materiae il-
Tab. XI. luſtrandae non parum inſeruiet. Nunc igitur propoſitum
Fig. 4. iſtud ſit Problema; quo datis binis punctis ſectionis conicae M, N, foco F et ſemiparametro principali, quaeruntur reliqua ſectionis Elementa. Heic vero mox liquet omne negotium eo redire, vt ſitus axis principalis F T U indagetur,

getur, quippe quo inuento determinatio alterius foci et reliquorum Elementorum nullam habebit difficultatem. Supponamus igitur iam inuentam eſſe directionem axis F T U, ſumtisque M V, N X ſemiparametro principali aequalibus, ducantur rectae V T, X U, iſtis M F, N F normales, quae axi in punctis T et U occurrant; tum vero ducta ſupponatur T Y normalis ad N F et ipſi U X parallela, et iungantur M T, N U. Quia igitur M V aequalis ſemiparametro principali, et V T normalis ad V M, erit iuncta T M normalis ad Sectionem Conicam in puncto M. Simili quoque ratione erit U N normalis ad Sectionem Conicam in puncto N. Tum vero ſi puncta M, N iuncta ſupponantur cum altero foco f, patet per ea quae in conicis demonſtrantur, angulos F M f, F N f biſecari per rectas M T, N U, vnde fiet $MF : TF = MF + Mf : Ff = FN + fN : Ff = NF : UF$. Atqui eſt $UF : TF = XF : YF$, hinc erit $NF : MF = XF : YF$, quum igitur dentur N F, M F, X F, dabitur Y F, ideoque punctum Y, hinc recta Y F normalis ad N F, ideoque punctum T in quo rectae V T, Y T ſe interſecant.

§. 30. Solutio Problematis igitur ita componetur, vt per X ducatur linea X Z ipſi N M parallela, tum vero centro F interuallo F Z, reſecetur F Y, et ducatur Y T normalis ad N F, et V T normalis ad M F, harum rectarum interſectio T cum puncto F iuncta, dabit axin principalem orbitae. Ex conſtructione enim allata patet eſſe $YF : XF = MF : NF$, hinc $TF : UF = MF : NF$ et alternando $TF : MF = UF : NF$, ex quo patet eſſe $TF : MF$ in data ratione, hincque colligitur axem principalem ſectionis conicae cum linea F T U coincidere, ſi ea

quae in § praecedenti allata ſunt in vſum vocentur. Caeterum ſi ad rigorem Geometricum huius demonſtrationis quidquam deſideretur, illi defectui ſupplendo ſcrupuloſius non eſt vt inuigilemus, quia mox aliam conſtructionem huius Problematis adferemus; praemiſſo nimirum Theoremate quodam Geometrico admodum eleganti ab Ill. *Eulero* primum inuento.

Theorema Geometricum.

Tab. XI. Fig. 3. §. 31. *Si ex foco* F *ſectionis conicae erigatur ad axem principalem* A B *normalis* F E, *qui curuae occurrit in* E, *et ſi inſuper ex foco ad curuam ductae fuerint lineae quaecunque* F M, F N, *tumque linea* N M *producatur, vsque dum lineae* F E, *ſi opus eſt productae, occurrat in* P *et ex* P *in lineam* F L, *quae angulum* M F N *biſecat, ducatur normalis* P R *ipſis* F M, F N *in* m, n *occurrens, erit* F m = F n, *aequalis ſemiparametro principali Sectionis conicae.*

Cum hoc Theorema Geometricum variis quidem rationibus demonſtrari poſſit, tum illam praecipue demonſtrationem heic adferre conſtituimus, quae maxime concinna videtur. Fig. 4 Si igitur ſupponantur ductae Lineae M T, N U ad ſectionem conicam normales, quae axi principali in punctis T et U occurrant, tumque U X, T V normales ad rectas F N, F M; ſimili ratione ac ſupra demonſtrabitur eſſe M V = N X aequalis ſemiparametro principali et F T : F M = F U : F N. Deinde ſi ex punctis M et N in rectam F P normales demittantur M I, N K erit

Δ I M F

Δ I M F $\sim$ V F T et K N F $\sim$ F X U, hinc

$$IM : FV = FM : FT = FN : FU = KN : FX,$$

ideoque I M : K N = F V : F X, tumque

$$PM : PN = FV : FX = FM - EF : FN - EF, \text{ ob}$$

$$MV = EF = NX.$$

Porro ſi concipiatur recta N S ipſi F M parallela, erit angulus $NSn = FMn = Fnm = NnS$ hincque $NS = Nn$. Nunc vero eſt ob Mm parallelam ipſi N S,

$$PM : PN = Mm : NS = Mm : Nn = FM - Fm : FN - Fn$$

ideoque fiet

$$FM - FE : FN - FE = FM - Fm : FN - Fn,$$

quamobrem oportet eſſe $FE = Fm = Fn$.

§. 32. Hinc igitur Problematis noſtri Primi ſequens elicitur conſtructio: centro F, radio F E = ſemiparametro principali, reſecentur $Fm = Fn$, tum vero ducta recta nmP quae ipſi N M productae in P occurrat, ſi iungatur P F, ad eamque perpendicularis erigatur A F B, coincidet haec recta cum ſemiaxe principali ſectionis conicae. Vnde quum ſectionis conicae detur focus, ſemiparameter principalis, et axis principalis poſitione cognitus ſit, ipſa conſtructio obuia eſt. Ex Theoremate enim praecedente liquet, nullam aliam rectam per F ductam praeter illam A F B pro axe principali haberi poſſe.

§. 33. Progrediamur nunc ad Problema noſtrum ſecundum, quod more Geometris vſitato expreſſum poſtulat, vt datis ſectionis conicae foco et binis in illa punctis, deſcribatur ſectio conica per data illa puncta tranſiens

et quae ſpecie ſit cognita. Quum enim per excentricitatem intelligamus proportionem inter diſtantiam focorum et ſemiaxem principalem; ſi haec excentricitas ſupponatur data, ſpecies ſectionis conicae omnino erit cognita, omnes enim ſectiones conicae eadem excentricitate praeditae prorſus inter ſe ſunt ſimiles. Huius Problematis ſolutio quum iterum eo reducatur vt ſitus axis principalis A F B inueſtigetur; ſupponamus hunc axem eſſe ductum eiusque verticem A, tum in F A producta ſumatur A D : A F, vti axis principalis ad diſtantiam focorum et per D concipiatur D H G normalis ad axem principalem, tumque ex punctis M, N, in rectam D G ducantur perpendiculares M G, N H. Quum itaque in conicis demonſtretur eſſe

Tab. XI Fig. 3.

$$G M : F M = H N : F N = D A : A F,$$

nunc Problematis conſtructio obuia fiet; nam ob datas F M, F N, dabuntur magnitudine M G, N H, ideoque dabitur poſitione linea G D, quippe quae tanget binos circulos centris M, N et interuallis M G, N H deſcriptos; hinc dabitur linea D B normalis ad G B, eritque ipſe axis principalis ſuper hac linea ſitus. Conſtructio hinc deducenda prorſus coincidet cum illa, quam in Principiis Phil. Nat. Illuſtris *Newtoni* Lib. I. Sect. IV. Prop. XX. Caſ. 1, allatam inuenimus.

§. 34. Nunc igitur aliam quoque ſolutionem ſubiungere haud ſuperfluum erit. Quum itaque ſit

$$\Delta F I M \sim V F T, \text{ erit } I M : M F = V F : F T,$$

hinc alternando I M : V F = M F : F T, eſt vero

$$V F = M F - E F = M F - F m,$$

per Theorema ſupra demonſtratum, ideoque

I M

$$I\,M : M\,m = M\,F : T\,F$$

in ratione data. Porro ob

$$\text{ang.}\ F\,M\,N = M\,P\,m + F\,m\,R \ \text{et}$$

$$\text{ang.}\ F\,N\,P = \text{ang.}\ N\,n\,S - \text{ang.}\ M\,P\,m = F\,n\,R - M\,P\,m,$$

fiet

$$F\,M\,N - F\,N\,P = 2\,M\,P\,m,$$

ideoque dabitur angulus

$$M\,P\,m = \tfrac{1}{2}(F\,M\,N - F\,N\,P),$$

praeterea quum detur angulus P M m, triangulum P M m erit ſpecie datum, hincque ratio P M : M m erit data, tum vero ob datam rationem I M : M m; dabitur ratio P M : I M in triangulo ad I rectangulo, hincque dabitur angulus P M I et recta I M erit poſitione data, nec non A F B, quae priori eſt parallela.

§. 35. Conſtructio autem Problematis hinc deducenda, ita commodiſſime abſoluitur: vt ſumta pro lubitu linea P M ſuper ea deſcribatur ſemicirculus, tumque in illo aptetur linea M I, quae ad P M datam habeat rationem, hoc eſt vt ſit

$$I\,M : P\,M = \frac{I\,M}{M\,m} \cdot \frac{M\,m}{P\,M} = \frac{\text{ſin.}\ M\,P\,m}{e\ \text{ſin.}\ P\,m\,M}$$

$$= \frac{\text{ſin.}\ \tfrac{1}{2}(F\,M\,N - F\,N\,M)}{e\ \text{coſ.}\ M\,F\,L} = \frac{\text{coſ.}\ M\,L\,F}{e\ \text{coſ.}\ M\,F\,L},$$

deinde vero ducatur linea A F B ipſi M I parallela, eritque axis principalis ſectionis conicae (vti ex praecedentibus conſtat) ſitus ſuper hac linea A F B. Vel etiam conſtructio Problematis ſequentem in modum adornari poteſt:

$$\text{Ob ſin.}\ M\,P\,F = \frac{I\,M}{P\,M} = \frac{\text{ſin.}\ M\,P\,m}{e\ \text{ſin.}\ P\,m\,M}$$

 dabi-

dabitur angulus M P F, hincque ſuper M F deſcribatur ſegmentum circuli quod anguli $=$ M P F capax eſt, recta N M producta iſti ſegmento occurrens in P, dabit lineam F P ideoque axem A F B ipſi F P perpendicularem.

§. 36. Si vt ſupra ducta intelligatur recta D H normalis ad D B, quae M N productae in Q occurrit, et M I producta concipiatur vsque ad G, tumque iungatur recta Q F, erit Q M : G M $=$ P M : I M et

$$GM : MF = IM : Mm = 1 : e;$$

hinc ex aequo Q M : M F $=$ P M : M m ex quo liquet rectam Q F fore ipſi P R parallelam et normalem ad F L, vnde dabitur punctum Q. Porro erit

$$\frac{GM}{QM} = \frac{IM}{PM} = \frac{IM}{Mm} \cdot \frac{Mm}{PM} = \frac{1}{e} \cdot \frac{FM}{QM},$$

hincque G M $= \frac{FM}{e}$, vnde iſta deducitur conſtructio, ſuper Q M deſcribatur ſemicirculus, in quo aptetur G M : M F $= 1 : e$, inuenietur ſitus axis principalis ducendo per F lineam D B ipſi G M parallelam, atque haec quidem conſtructio illa a *Newtono* propoſita aliquanto facilior eſſe videtur.

§ 37. Operae pretium nunc quoque erit, vt oſtendamus quomodo Analyſis noſtra in ſuperioribus §. 7. allata, ad hanc perducat conſtructionem. Quia igitur ibi

Fig. 3 habebatur tang. $\eta =$ tang. $\delta \cdot \frac{1+e}{1-e}$, adplicatione ad noſtram Figuram facta, erit

$$\text{cot. } LPR = \text{cot. } \tfrac{1}{2}(FMN - FNM)$$
$$= \text{tang. } MFL \frac{(FN + FM)}{FN - FM},$$

hinc L P R $= 90 - \eta$. Porro quum ſit

— coſ.

$-\text{coſ.}(\varepsilon + \eta) = \frac{\text{coſ.}\,\eta}{e\ \text{coſ.}\,\delta}$, fiet

$$\text{ſin.}(AFL - LPR) = \frac{1}{e} \cdot \frac{\text{ſin.}\,LPR}{\text{coſ.}\,M} \frac{PR}{FL} = \frac{1}{e} \cdot \frac{\text{ſin.}\,LPR}{\text{ſin.}\,Pm} \frac{PR}{M} = \frac{1}{e} \frac{Mm}{PM},$$

nunc vero eſt

$$\text{ſin.}(AFL - LPR) = \text{ſin.}(90 + PFL - LPR)$$
$$= \text{ſin.}(180 - FPR - LPR) = \text{ſin.}\,FPM,$$

ideoque $\frac{IM}{PM} = \frac{1}{e} \cdot \frac{Mm}{PM}$, hincque $e = \frac{Mm}{IM}$, quod omnino conſentit cum iis, quae ſupra demonſtrauimus.

§. 39. Problematis tertii ſolutionem quandam Geometricam ſatis concinnam quum adepti non fuerimus; ad Problema quartum progrediamur, pro quo ſolutio Geometrica admodum facilis et vnicuique fere obuia ſtatim occurrit. Scilicet quum ibi quaeratur ſectio conica datum habens focum, per bina puncta data tranſiens, et cuius axis principalis etiam magnitudine ſit datus, quia in Elementis Sectionum conicarum demonſtratur, binas rectas FM, fM ex focis F, f ſectionis conicae ad quodvis eius punctum M ductas, ſimul ſumtas aequales eſſe axi principali ſectionis, ob datas FM, FN et ſummas $FM + fM$, $FN + fN$, dabuntur itidem rectae fM, fN, ideoque punctum f ſeu alter focorum, qui nimirum definietur interſectione binorum circulorum centris M, N et interuallis datis Mf, Nf deſcriptorum.

§. 39. Quum ſolutio Problematis quarti Geometrica tam facile expediatur, ſingulare forſan videri poſſet, quod ſolutio per Analyſin perficienda aliquanto abſtruſior videatur. Verum enim vero ſi ipſam hanc ſolutionem Geometricam attente perpendamus, facile patebit ſolutionem

Tab. XI. Fig. 5. nem Analyticam ex ea deriuandam vix facilius adornari poſſe, ac §. 15 praeſtitimus. Id enim hic agitur, vt datis pro quadrilatero F M f N, ſingulis lateribus, F M, M f, F N, N f, cum angulo M F N, quaeratur angulus quem alterutrum laterum M F, N F cum diagonali F f conſtituit; cuius Problematis ſolutio expeditiorem ſolutionem admittere non videtur, ac illa quae §. 15 allata eſt. Immo quia in hoc caſu ſpeciali Problematis propoſiti, ſumma laterum F M + M f = F N + N f, ſolutio Problematis eo ipſo aliquanto fit concinnior, quam ſi nulla huiusmodi laterum relatio ſupponeretur.

§. 40. Problematis ſexti quum quatuor omnino habeantur ſolutiones, conſtructionem Geometricam per rectam et circulum non admittit, verum deſcriptiones linearum ſecundi generis ſeu ſectionum conicarum requirit; et quidem mox liquet, ſi focis M, N et axi principali = F N − F M deſcribatur hyperbola, tumque centro F radio F f, circulus, interſectiones huius circuli cum iſta hyperbola, praebere puncta in quibus alterum ſocum ſectionis quaeſitae ſtatuere oportet. Hinc ſi eueniat, vt iſte circulus hyperbolam in quatuor punctis interſecet, Problematis quatuor omnino erunt ſolutiones; at ſi binae tantum dentur interſectiones ſolutionum realium numerus binarium non excedet, reliquis duobus in imaginarias abeuntibus.

§. 41. Antequam huic diſquiſitioni finem imponamus, monuiſſe nonnulla attinet de ſolutione Problematis II^i, caſu quo excentricitas ſupponatur = 1, id eſt ſi ſectio conica fuerit Parabola. Tum vero fiet

$c(1 +$

$$c\,(1+\text{coſ.}\,\Phi) = c'\,(1+\text{coſ.}\,\Phi'),$$

hincque

$$\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c'}} = \frac{\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\Phi'}{\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\Phi},$$ nec non

$$\frac{\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\Phi - \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\Phi'}{\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\Phi + \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\Phi} = \frac{\sqrt{c'}-\sqrt{c}}{\sqrt{c'}+\sqrt{c}},$$ ſiue

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{4}(\Phi'-\Phi)\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{4}(\Phi'+\Phi) = \frac{\sqrt{c'}-\sqrt{c}}{\sqrt{c'}+\sqrt{c}},$$

ideoque ſi ſtatuatur $\sqrt{\frac{c}{c'}} = \text{coſ.}\,\lambda$ fiet

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{4}(\Phi'-\Phi)\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{4}(\Phi'+\Phi) = \frac{1-\text{coſ.}\,\lambda}{1+\text{coſ.}\,\lambda} = \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\lambda^2,$$

proinde

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{4}(\Phi'+\Phi) = \text{cot.}\,\tfrac{1}{4}(\Phi'-\Phi)\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\lambda^2$$

DETERMINATIO LATITVDINIS ET LONGITVDINIS VRBIS OREL, DEDVCTA EX OBSERVATIONIBVS ASTRONOMICIS ANNO 1781 HABITIS.

Auctore
PETRO INOCHODZOW.

Perficiendae Geographiae Ruſſicae, quae noſtris diebus nouam induit faciem, annuit AVGVSTISSIMA IMPERATRIX, vt mitterentur obſeruatores ad determinandum ſitum locorum magni EIVS imperii celebriorum. Inter haec prima ſtatio vrbis Orel, quae iacet ad fluuium Ocam et diſtat a fonte ipſius 73 werſtis, mihi erat conſtituta. Inſtrumenta, quibus ab illuſtriſſima Academia ſcientiarum ad obſeruationes has faciendas inſtructus, fuere ſequentia egregiae bonitatis:

1. Qua-

1. Quadrans duorum pedum Londini a Siſſon fabrefactus.
2. Bina horologia pendula Pariſiis a le Paute conſtructa.
3. Tubus achromaticus Dollondianus 12 pedum.
4. Tubus achromaticus 3^{ium} pedum eiusdem artificis.
5. Teleſcopium Gregorianum 80 pollicum heliometro inſtructum a Short elaboratum.
6. Pyxis magnetica declinatoria Pariſiis conſtructa.
7. Acus inclinationis Petropoli fabricata.
8. Thermometra et Barometra ibidem conſtructa.

Examen quadrantis.

1. Ad horizontem

Factis in trabe quatuor metis, quarum diſtantiae erant $22\frac{1}{2}$ pollicum, aequales nempe differentiae altitudinum tubi, dum quadrans e ſitu erecto in ſitum inuerſum conuertitur; hacque trabe ad diſtantiam dimidiae circiter werſtae erecta, cepi ſucceſſiue altitudines trium ſuperiorum metarum in ſitu quadrantis recto, et trium proxime inferiorum prioribus reſpondentium in ſitu inuerſo. Ex repetitis operationibus ſequentes pro errore quadrantis reperi valores:

Dies operationis	metae deſuper	in ſitu recto	metae deſuper	in ſit. inuerſ.	error quadrant. ſubtract.
	I	− 0°.26′.43″	II	+ 0°.38′.20″	5′.48½″
9/20 Aug.	II	− 0. 34. 17	III	0. 45. 56	5. 49½
	III	− 0. 41. 45	IV	0. 53. 26	5. 50½
	I	− 0. 26. 45	II	0. 38. 22	5. 48½
11/22 Aug.	II	− 0. 34. 28	III	0. 45. 58	5. 45
	III	− 0. 41. 53	IV	0. 53. 25	5. 46
	I	− 0. 2[illegible]. 55	II	0. 38. 28	5. 46½
12/23 Aug.	II	− 0. 34. 33	III	0. 46. [illegible]1	5. 44
	III	− 0. 42. 6	IV	0. 53. 34	5. 44
	I	− 0. 27. 7	II	0. 38. 51	5. 52
2/13 Sept.	II	− 0. 34. 45	III	0. 46. 15	5. 45
	III	− 0. 42. 8	IV	0. 53. 52	5. 52
				Ex omnibus medius - -	5. 47.

2. Ex altitudinibus fixarum ad Auſtrum et Boream captis

Quum rectificatio huius inſtrumenti ad Zenith, ob prominentiam Nonnii ſitum penduli deturbantem, tuto inſtitui non poſſit, elegi fixas ſub eadem fere altitudine ad Auſtrum et ad Boream culminantes: in illarum numero occurrunt α, δ Lyrae et η Pegaſi, inter has vero δ Draconis, β et γ Cephei. Collatis obſeruationibus cum calculo deprehendi errorem ſubtractiuum, vt ſequitur.

Ex α Lyrae et δ Draconis in altitudine 75°

die $\frac{26\ Aug.}{6\ Sept.}$ - - - - -	5′.	59″½
$\frac{2}{13}$ Sept. - - - - -	6.	2
$\frac{4}{15}$ Sept. - - - - -	6.	3
$\frac{11}{22}$ Sept. - - - - - -	5.	59
med.	6.	2

Ex δ Lyrae et β Cephei in altitudine 73°

$\frac{26\ Aug.}{6\ Sept.}$ - - - - -	5	51
$\frac{21}{13}$ Sept. - - - - -	5.	53
med.	5.	52

Ex η Pegaſi et γ Cephei in altitudine 66°

$\frac{23\ Aug.}{3\ Sept.}$ - - - - - -	5.	51
$\frac{26\ Aug.}{6\ Sept.}$ - - - - -	5.	51
$\frac{2}{13}$ Sept. - - - - - -	5.	49
med.	5.	50

His addi poſſunt aliae comparationes

Ex α Lyrae et β Cephei - -	6.	2
δ Lyrae et δ Draconis - -	5.	50
β Cygni et γ Cephei - -	5.	53
γ Lyrae et β Cephei - -	5.	54
eadem et γ Cephei - -	5.	50
γ Aquarii et α Vrſae maioris - -	5.	48½
Medium ex omnibus	5.	53½

Ex allatis exemplis ſatis liquet, errorem Quadrantis prope Zenith parum differre ab errore eiusdem ad horizontem: diſcrepantia paucorum ſecundorum partim obſeruationibus partim tabulis et reductionibus adſcribi poteſt. Hinc ſumto ex vtroque medio prodit ille $-5' 50''$; quem a vero 5 ſecundis vix abludere veriſimillimum eſt.

Determinatio latitudinis ex altitudinibus Solis et fixarum meridianis.

Poſitionem meridiani determinabam ope circuli azimuthalis, pedi Quadrantis adnexi, cuius diameter eſt $12\frac{1}{4}$ pollicum. Capiendo altitudines Solis correſpondentes in ipſo tubi centro, notabam gradus et minuta in circulo memorato; atque ex obſeruationibus matutinis et pomeridianis ſumebam medium, cui ob variationem declinationis Solis hanc applicui correctionem.

Denotantibus P eleuatione Poli
D declinatione Solis boreali
m correctione meridiei in ſecundis,

correctio quaeſita $= \frac{15\, m \text{ coſ. } D}{\text{ſin. } (P - D)} = 15\, m$ coſ. D coſec. (P − D) quae in minuta prima commutata eodem modo ac correctio meridiei applicatur, in ſignis nempe deſcendentibus additur, in aſcendentibus ſubtrahitur. Poſito hoc modo Quadrante in meridianum, differentia inter appulſum centri ſolis ad filum micrometri verticale, et meridiem verum per altitudines correſpondentes repertum, raro ad 6 vel 8 ſcrupula temporis ſecunda aſſurgebat.

Circa

Circa altitudines Solis et fixarum meridianas notandum venit, eas, vt ſpatio parceretur, ab errore Quadrantis ſupra definito iam purgatas eſſe; porro in computanda declinatione Solis differentiam meridianorum inter Pariſios et Orel rotunde 2¼ horarum aſſumtam; Declinationes vero fixarum apparentes ex tabulis ephemeridum anni currentis calculatas; tabulam denique refractionis D. de la *Caille* adhibitam.

Dies obſ. St. Nou.	alt. obſeru.	Refract. — Parall.	ſemid. ☉	Declin. ☉	eleu. Poli
		Altitud. limbi auſtralis.			
3 Aug.	54°.12′.47″	0′. 43″		17°.24′.39″	52°.56′.46″
5	53. 40. 42	0. 44	15′. 49	16. 52. 26	39
6	53. 24. 5	0. 44		16. 35. 56	46
		Altitud. limbi borealis.			
7	53. 39. 4	0. 44	15. 49	16. 19. 8	52°.56′.37″
10	52. 47. 24	0. 45	15. 50	15. 27. 12	23
13	51. 53. 15	0. 47		14. 33. 3	25
15	51. 15. 45	0. 49		13. 55. 45	40
16	50. 57. 0		15. 51	13. 36. 47	27
17	50. 37. 40			13. 17. 32	33
18	50. 18. 29	0. 50		12. 58 11	24
19	49. 58. 40		15. 52	12 38. 34	36
21	49. 18. 50	0. 52		11. 58. 45	39
23	48. 38. 26	0. 53		11. 18. 10	30
24	48. 17. 40	0. 54	15. 53	10. 57. 37	44
25	47. 57 6			10. 36. 53	34
27	47. 15. 6	0. 55		9. 54. 55	37
30	46. 10. 55	0. 58	15. 54	8. 50. 46	43

Dies

Dies obſ. St. Nou.	alt. obſeru.	Refract. — Parall.	ſemid. ☉	Declin. ☉	eleu. Poli
3 Sept.	44°.43'.25	1'. 1"	15'.55"	7°.23'.18"	52°.56'.49"
4	44. 21. 20	1. 2		7. 1. 7	44
6	43. 36. 42	1. 4		6. 16. 24	42
7	43. 14. 6	1. 5	15. 56	5. 53. 53	48
8	42. 51. 40	1. 6		5. 31. 16	38
12	41. 20. 22	1. 10	15. 57	3. 59. 56	41
13	40. 57. 25			3. 36. 55	37
14	40. 34. 30	1. 12	15. 58	3. 13. 50	30
15	40. 11. 10	1. 13		2. 50. 41	42
18	39. 1. 38	1. 15	15. 59	1. 40. 50	31
22	37. 28. 10	1. 20	16. 0	0. 7. 25	35

Medium ex omnibus 52. 56 37.

Altitudines fixarum meridianae.

Dies obſ. St. Nou	Nom. fix.	alt. obſeru.	refract.	Decl. appar. ad diem obſ.	Latitudo.
10 Aug	δ Hercul.	62°.10'.35"	0'. 35"	25°. 6'.40"	52°.56'.45"
	α Ophiuc.	49. 48. 14	0. 56	12. 44. 12	54
	β - -	41. 47. 57	1. 14	4. 40. 24	41
24	θ Hercul.	74. 21. 8	0. 19	37. 17. 32	43
	α Lyrae	75. 39. 10	0. 17	38. 35. 28	35
30	α Lyrae	75. 39. 12	0. 17	38. 35. 29	34
	β - -	70. 11. 0	0. 24	33. 7. 26	50
	δ - -	73. 41. 33	0. 20	36. 38. 5	52
3 Sept.	α Lyrae	75 39. 14	0. 17	38. 35. 30	33
	β - -	70. 10. 59	0. 24	33. 7. 27	52
	δ - -	73. 41. 35	0. 20	36. 38. 5	50

3 Sept.

Dies obſ. St. Nou.	Nom. fix.	alt. obſeru.	refract.	Decl. appar. ad diem obſ.	Latitudo.
3 Sept.	γ Lyrae	69°. 28′. 0″	0′. 25″	32°. 24′. 15″	52°. 56′. 40″
	γ Aquar.	34. 35. 58	1. 36	2. 28. 48	50
	η Pegaſi	66. 8. 49	0. 30	29. 5. 7	48
	α Vrſ. mai.	25. 54. 40	2. 15	62. 55. 49	36
	γ Cephei	66. 32. 46	0. 29	76. 24. 34	51
6. - -	α Lyrae	75. 39. 14	0. 17	38. 35. 30	33
	β - -	70. 11. 0	0. 24	33. 7. 27	51
	δ - -	73. 41. 32	0. 19	36. 38. 6	53
	γ - -	69. 27. 55	0. 25	32. 24. 16	46
	δ Draconis	75. 40. 22	0. 17	67. 16. 47	52
	α Sagittar.	54. 55. 38	0. 47	17. 31. 34	43
	γ Cygni	76. 37. 47	0. 16	39. 34. 0	29
	β Cephei	73. 20. 58	0. 20	69. 36. 17	55
	γ Aquarii	34. 35. 58	1. 36	2. 28. 48	50
	η Pegaſi	66. 8. 54	0. 30	29. 5. 8	44
	α Vrſ. mai.	25. 54. 38	2. 15	62. 55. 48	35
	γ Cephei	66. 32. 40	0. 29	76. 24. 35	46
7. - -	ε Cygni	70. 13. 10	0. 24	33. 9. 38	52
	β Cephei	73. 20. 50	0. 20	69. 36. 18	48
	γ - -	66. 32. 41	0. 29	76. 24. 36	48
13. - -	α Lyrae	75. 39. 16	0. 17	38. 35. 30	31
	β - -	70. 10. 59	0. 24	33. 7. 28	53
	δ - -	71. 41. 32	0. 19	36. 38. 7	54
	γ - -	69. 27. 50	0. 25	32. 24. 16	51
	δ Dracon.	75. 40. 25	0. 17	67. 16. 48	56
	β Cephei	73. 20. 58	0. 20	69. 36. 19	57
	η Pegaſi	66. 8. 54	0. 30	29. 5. 10	46
	γ Cephei	66. 32. 35	0. 29	76. 24. 36	42

 Dies

Dies obſ St Nou	Nom. fix	alt. obſeru.	refract.	Decl. appar. ad diem obſ.	Latitudo.
15 Sept.	α Lyrae	75°. 39′. 18″	0′ 17″	38°. 35′. 31″	52°. 56′. 30″
	β - -	70. 11. 10	0. 24	33. 7. 28	42
	δ Dracon.	75. 40. 24	0. 17	67. 16. 49	56
19 - -	Aldebaran	57. 3. 50	0. 50	16. 3. 35	35
22 - -	α Lyrae	75. 39. 12	0. 17	38. 35. 31	36
	β - -	70. 11. 8	0. 24	33. 7. 29	45
	δ Dracon.	75. 40. 23	0. 17	67. 16 50	- - 56

Medium ex omnibus 52. 56. 45

Hinc ſequitur latitudinem vrbis Orel, ſine ſenſibili errore ſtatui poſſe 52°. 56′. 40″.

De longitudine geographica eiusdem vrbis.

Pro ſtabilienda longitudine duas emerſiones ſatellitum Iouis obſeruare mihi licuit. Alias vero apparentias coeleſtes huic ſcopo inſeruientes et quae hic videri potuiſſent, tempeſtas nubila reddidit inuiſibiles.

I. Emerſio 2[di] ſatellitis die [illegible] Iulii obſeruata tubo Dollondiano

Satelles ex vmbra emergit 9h. 35′. 50″ temp. ver.
clarior apparet 9. 36. 14

Eandem emerſionem D. *Tschernoi*
teleſcopio Gregoriano notauit 9. 35. 45.

II. Emerſ. 1[mi] ſatell. die [illegible] Aug. obſ. 7. 47. 25 dub.
7. 47. 30 certa.

Socius

Socius impeditus 20 ſcrupulis ſecundis tardius eandem obſeruauit.

De vtraque obſeruatione a me facta non habeo quod dubitem; ambae enim inſtitutae coelo fauente, Ioue bene terminato et faſciis ſat conſpicuis. Motus horologii per altitudines Solis correſpondentes diebus obſeruationes has praecedentibus et inſequentibus captas bene exploratus.

Deficientibus obſeruationibus correſpondentibus nihil reſtat agendum niſi vt comparentur illae cum momentis ex ephemeridibus depromtis:

Emerſio 2^{di} ſatellitis Pariſiis e calculo	7^h.	$21'$.	$12''$
collata cum obſeruatione mea praebet differentiam meridianorum	2.	14.	38
Emerſio autem 1^{mi} ibidem notata	5.	33.	4
dat differentiam	2.	14.	26
Media igitur differentia meridianorum	2.	14.	32

Ob maiorem certitudinem contuli eaſdem cum calculis ephemeridum Berolinenſium: prior ibi notata 8^h. $5'$. $13''$ dat differentiam 1^h. $30'$. $37''$; altera vero 6^h. $17'$. $37''$ praebet 1^h. $29'$. $53''$; medium ex vtraque 1^h. $30'$. $15''$ Cum iam longitudo Berolini a Pariſiis ſit 0^h. $44'$. $10''$ longituto vrbis Orel a Lutetiis Pariſiorum eruitur 2^h. $14'$. $25''$. Quum concluſiones hae tam egregie inter ſe conſentiant, longitudo media ſtatui poteſt 2^h. $14'$. $28''$; adeoque in partibus aequatoris $33°$. $37'$. et a meridiano primo $53°$ $37'$; quam ſi pro exacta aſſerere non audeam, illam tamen

 haud

haud procul a veritate declinare et pro vſu geographico ſufficientem eſſe confido.

De declinatione & inclinatione acus magneticae.

Declinationem acus magneticae obſeruaturus probe examinaui latus pyxidis parallelum eſſe lineae per cardines ſeptentrionalem et auſtralem tranſeuntis: dein applicato latere pyxidis ad planum quadrantis in meridiano conſiſtentis, ex repetitis ſaepiſſime obſeruationibus inueni declinationem 9° a Septentrione verſus Occaſum; nullamque ſenſibilem mutationem animaduerti. Inclinationem acus deprehendi inter 65 et 70 gradus; verum his experimentis ob vitium inſtrumenti ex itinere acceptum non ſum contentus, iisque referendis ſuperſedeo.

NOU-

NOUVELLES RECHERCHES SUR LES INÉGALITÉS DANS LE MOUVEMENT DE LA TERRE CAUSÉES PAR L'ACTION DE VENUS;

par

NICOLAS FUSS.

En calculant la table des corrections du lieu de la Terre dérangée par l'action de Venus, laquelle ſe trouve dans le ſecond Volume des nouveaux Actes de l'Académie, à la fin du ſecond mémoire ſur ce ſujet important, je n'eus pas, à la verité, beaucoup de confiance en la méthode qui ſervit de baſe à mon calcul. Cette méthode, quoique très belle en elle même & préférable à certains égards à celle que ſon illuſtre Auteur avoit propoſée dans le XVIe. Volume des nouveaux Commentaires, ne me parût pas ſuſceptible, dans l'exécution, d'un degré ſuffiſant de préciſion, à moins de faire des calculs capables de rebuter le plus intrépide calculateur. J'avois appris à me défier des approximations ſuivies de ſubſtitutions trop ſouvent repétées. Mes doutes ceſſerent pourtant, lorsqu'après avoir achevé ma table j'ai vu qu'elle s'accordoit aſſés bien avec celle de feu Mr. *de la Caille*, aux différences

près qui ont du naitre de ſon rapport des maſſes, adopté avant la dernière détermination de la Parallaxe du Soleil. J'avois perdu de vue la comparaiſon de ſa table avec celle du premier mémoire de Mr. *Euler*, qui auroit achevé de me jetter dans l'incertitude, ſi j'y euſſe fait attention.

Frappé cependant de la différence entre les deux tables de Mr. *Euler*, dont je m'apperçus pendant l'impresſion des deux derniers mémoires, j'ai toujours penſé à réfaire mon calcul, lorsque Mr. *Lexell*, Geomètre auſſi conſommé qu'habile Aſtronome, engagé par les ſollicitations de MM. *de la Place* & *de la Lande* ſe mit à examiner le premier mémoire & y apporta les corrections qui ſe trouvent dans ſon mémoire inſeré au VIe. Volume des Actes. La table qui eſt à la ſuité de ce mémoire s'accorde très bien avec la mienne, à quelques petites différences près, que j'ai d'abord attribuées à la ſuppoſition differente de la diſtance moyenne de Venus au Soleil & du rapport des maſſes; & cet accord inattendu a du diſſiper naturellement jusqu'au moindre doute ſur la certitude de la ſeconde methode de Mr. *Euler*, qui paroit l'emporter auſſi ſur la première par la facilité du calcul.

En parcourant de nouveau cette méthode j'ai vu qu'elle peut non ſeulement etre préſentée d'une manière plus lumineuſe & plus ſuivie, mais que le calcul numerique, dont je n'avois mis que le réſultat dans le ſecond mémoire, eſt ſusceptible d'une grande diminution de travail, c'eſt ce qui m'a engagé à le réfaire, & j'en vais préſenter ici les détails à la ſuite de la Théorie même, que je vais reprendre, ſans m'arrêter pourtant à toutes les

pe-

petites opérations préliminaires, me reſervant la liberté d'être plus étendu dans les paſſages, où je me ſuis écarté de la route tracée par Mr. *Euler*, ſurtout dans la réſolution des équations principales que fourniſſent les principes du mouvement, & dans le développement du binome $(1 - n \operatorname{coſ.} \eta)^{-\frac{3}{2}}$, en gardant cependant pour l'une & l'autre les mêmes dénominations.

§. 1. Soyent ⊙, B, A, les lieux du Soleil, de Venus & de la Terre, pour le moment de la conjonction des deux Planètes, tous trois dans le plan de l'écliptique, & ſuppoſons qu'après un intervalle de temps t, répondant au moyen mouvement de la Terre θ, les deux Planètes ayent décrits les angles A ⊙ ♁ $= \phi$ & B ⊙ ♀ $= \psi$, nous aurons l'angle d'élongation ♁ ⊙ ♀ $= \eta = \psi - \phi$. Soyent les diſtances au Soleil ⊙ ♁ $= v$ & ⊙ ♀ $= a$, & la diſtance des deux Planètes ♁ ♀ $= w = \sqrt{(aa + vv - 2av \operatorname{coſ.} \eta)}$. Enfin nous exprimons la maſſe du Soleil par l'unité & celle des deux Planètes, que nous ſuppoſons égales, par m. Cela poſé la force dont le Soleil agit ſur la Terre dans la direction ♁ ⊙ ſera $= \frac{m+1}{vv}$, & celle de Venus qui agit dans la direction ♁ ♀ $= \frac{m}{ww}$. A ces deux forces il faut ajouter une troiſième provenant de l'action de Venus ſur le Soleil dans la direction ♀ ⊙ $= \frac{m}{aa}$. Mais ces trois forces ſe réduiſent à deux, parce que la force ſelon ♁ ♀ équivaut à deux autres, l'une ſelon ♁ ⊙ $= \frac{mv}{w^3}$, l'autre ſelon ⊙ ♀ $= \frac{ma}{w^3}$; de ſorte que les deux forces qui agiſſent ſur la Terre dans les directions ♁ ⊙ & ♀ ⊙ ſont, la premiere $= \frac{1+m}{vv} + \frac{mv}{w^3}$, la ſeconde $= \frac{m}{aa} - \frac{ma}{w^3}$. Tab. XI. Fig. 6.

§. 2.

§. 2. Soyent les ordonnées pour le lieu de la Terre ⊙X $= x$, X♁ $= y$, & les forces qui agiſſent dans la direction de ces ordonnées ſeront:

$$\text{ſelon } \odot X = -\left(\frac{1+m}{v\,v} + \frac{m\,v}{w^3}\right) \text{coſ.}\,\Phi - \left(\frac{m}{a\,a} - \frac{m\,a}{w^3}\right) \text{coſ.}\,\psi$$

$$\text{ſelon } X♁ = -\left(\frac{1+m}{v\,v} + \frac{m\,v}{w^3}\right) \text{ſin.}\,\Phi - \left(\frac{m}{a\,a} - \frac{m\,a}{w^3}\right) \text{ſin.}\,\psi$$

qui doivent être égales aux forces accélératrices $\frac{d\,d\,x}{d\,t^2}$ & $\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}$, d'où l'on tire les deux équations ſuivantes:

$$\frac{d\,d\,x}{d\,t^2} = -\frac{1+m}{v\,v}\,\text{coſ.}\,\Phi - \frac{m\,v}{w^3}\,\text{coſ.}\,\Phi - \frac{m}{a\,a}\,\text{coſ.}\,\psi + \frac{m\,a}{w^3}\,\text{coſ.}\,\psi$$

$$\frac{d\,d\,y}{d\,t^2} = -\frac{1+m}{v\,v}\,\text{ſin.}\,\Phi - \frac{m\,v}{w^3}\,\text{ſin.}\,\Phi - \frac{m}{a\,a}\,\text{ſin.}\,\psi + \frac{m\,a}{w^3}\,\text{ſin.}\,\psi$$

qui combinées fourniſſent ces deux autres:

$$\frac{d\,d\,y\,\text{coſ.}\,\Phi - d\,d\,x\,\text{ſin.}\,\Phi}{d\,t^2} = -\frac{m}{a\,a}\,\text{ſin.}\,\eta + \frac{m\,a}{w^3}\,\text{ſin.}\,\eta,$$

$$\frac{d\,d\,x\,\text{coſ.}\,\Phi + d\,d\,y\,\text{ſin.}\,\Phi}{d\,t^2} = -\frac{1+m}{v\,v} - \frac{m\,v}{w^3} - \frac{m}{a\,a}\,\text{coſ.}\,\eta + \frac{m\,a}{w^3}\,\text{coſ.}\,\eta,$$

à cauſe de $\psi - \Phi = \eta$. Mais les ſecondes differentielles de l'abſciſſe $x = v\,\text{coſ.}\,\Phi$ & de l'ordonnée $y = v\,\text{ſin.}\,\Phi$ étant:

$$d\,d\,x = d\,d\,v\,\text{coſ.}\,\Phi - 2\,d\,v\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi - v\,d\Phi^2\,\text{coſ}\,\Phi - v\,d\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi$$

$$d\,d\,y = d\,d\,v\,\text{ſin.}\,\Phi + 2\,d\,v\,d\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi - v\,d\Phi^2\,\text{ſin.}\,\Phi + v\,d\,d\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi$$

on en tire par les mêmes combinaiſons:

$$\frac{d\,d\,y\,\text{coſ.}\,\Phi - d\,d\,x\,\text{ſin.}\,\Phi}{d\,t^2} = \frac{2\,d\,v\,d\Phi + v\,d\,d\Phi}{d\,t^2}$$

$$\frac{d\,d\,x\,\text{coſ.}\,\Phi + d\,d\,y\,\text{ſin.}\,\Phi}{d\,t^2} = \frac{d\,d\,v - v\,d\Phi^2}{d\,t^2},$$

ce qui donne les deux équations ſuivantes:

$$\frac{2\,d\,v\,d\Phi + v\,d\,d\Phi}{d\,t^2} = -\frac{m}{a\,a}\,\text{ſin.}\,\eta + \frac{m\,a}{w^3}\,\text{ſin.}\,\eta,$$

$$\frac{d\,d\,v - v\,d\Phi^2}{d\,t^2} = -\frac{1+m}{v\,v} - \frac{m\,v}{w^3} - \frac{m}{a\,a}\,\text{coſ.}\,\eta + \frac{m\,a}{w^3}\,\text{coſ.}\,\eta.$$

§ 3. Avant que de reſoudre ces deux équations il faut obſerver que pour les termes affectés du coëfficient $\frac{m}{w^3}$, com-

comme très petits, on pourra dans l'expreſſion de la diſtance $w = \sqrt{(aa + vv - 2av \operatorname{coſ.} \eta)}$ mettre à la place de v la diſtance moyenne de la Terre au Soleil que nous ſuppoſons $= 1$, & nous aurons

$$w = \sqrt{(1 + aa - 2a \operatorname{coſ.} \eta)} = \sqrt{1 + aa}\, \sqrt{1 - \tfrac{2a}{1+aa} \operatorname{coſ.} \eta},$$

ou bien

$$w = \sqrt{(1 + aa)}\,(1 - n \operatorname{coſ.} \eta)^{\frac{1}{2}},$$

en mettant pour abréger $n = \frac{2a}{1+aa}$; d'où l'on obtient

$$\frac{m}{w^3} = \frac{m}{(1+aa)^{\frac{3}{2}}}(1 - n \operatorname{coſ.} \eta)^{-\frac{3}{2}}$$

ou bien $\frac{m}{w^3} = \mu (1 - n \operatorname{coſ.} \eta)^{-\frac{3}{2}}$, en mettant $\frac{m}{(1+aa)^{\frac{3}{2}}} = \mu$.

En ſubſtituant donc cette valeur dans les deux équations principales, elles prendront la forme ſuivante:

$$\frac{2dv\,d\Phi + v\,dd\Phi}{d\theta^2} = -\frac{m}{aa} \operatorname{ſin.} \eta + \mu a \operatorname{ſin.} \eta (1 - n \operatorname{coſ.} \eta)^{-\frac{3}{2}},$$

$$\frac{ddv - v\,d\Phi^2}{d\theta^2} + \frac{1+m}{vv} = -\frac{m}{aa} \operatorname{coſ.} \eta + \mu a \operatorname{coſ.} \eta (1 - n \operatorname{coſ.} \eta)^{-\frac{3}{2}}$$
$$- \mu (1 - n \operatorname{coſ.} \eta)^{-\frac{3}{2}},$$

d'où il s'agit de tirer la valeur de v & de Φ exprimée par l'angle d'élongation η.

§. 4. Soyent pour cet effet nos deux équations

$$\frac{2dv\,d\Phi + v\,dd\Phi}{d\theta^2} = \mu P \quad \& \quad \frac{ddv - v\,d\Phi^2}{d\theta^2} + \frac{1+m}{vv} = \mu Q,$$

& mettant

$$v = 1 + \mu p \quad \& \quad \frac{d\Phi}{d\theta} = 1 + \mu q,$$

la première de ces équations, multipliée par $v = 1 + \mu p$, deviendra

$$\frac{2 v d v d \Phi + v v d d \Phi}{d \theta^2} = \mu (1 + \mu p) \mathrm{P} = \mu \mathrm{P},$$

à cauſe de μ^2 infiniment petit du ſecond degré. L'intégrale de cette équation eſt

$$\frac{v v d \Phi}{d \theta} = \mathrm{C} + \mu \int \mathrm{P}\, d \theta,$$

ou bien, en ſubſtituant & mettant la conſtante $\mathrm{C} = 1$,

$$(1 + \mu p)^2 (1 + \mu q) = 1 + 2 \mu p + \mu q = 1 + \mu \int \mathrm{P}\, d \theta,$$

d'où l'on tire $\int \mathrm{P}\, d \theta = 2 p + q$.

§. 5. La ſeconde équation devient

$$\frac{\mu d d p}{d \theta^2} - (1 + \mu p)(1 + \mu q)^2 + \frac{1 + m}{v v} = \mu \mathrm{Q},$$

ce qui à cauſe de

$$(1 + \mu p)(1 + \mu q)^2 = 1 + \mu p + 2 \mu q \ \&$$
$$\frac{1 + m}{v v} = \frac{1 + m}{1 + 2 \mu p} = (1 + m)(1 - 2 \mu p) = 1 + m - 2 \mu p$$

ſe reduit à

$$\frac{\mu d d p}{d \theta^2} + m - 3 \mu p - 2 \mu q = \mu \mathrm{Q},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\mu d d p}{d \theta^2} + m + \mu p - 2 \mu \int \mathrm{P}\, d \theta = \mu \mathrm{Q},$$

d'où enfin il réſulte

$$\frac{d d p}{d \theta^2} + p = \mathrm{Q} + 2 \int \mathrm{P}\, d \theta - \frac{m}{\mu},$$

où il y a

$$\mathrm{P} = - k\, \text{ſin.}\, \eta + a\, \text{ſin.}\, \eta\, (1 - n\, \text{coſ.}\, \eta)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\mathrm{Q} = - k\, \text{coſ.}\, \eta + a\, \text{coſ.}\, \eta\, (1 - n\, \text{coſ.}\, \eta)^{-\frac{3}{2}} - (1 - n\, \text{coſ.}\, \eta)^{-\frac{3}{2}}$$

en mettant pour abrèger $\frac{m}{\mu a a} = \frac{(1 + a a)^{\frac{3}{2}}}{a a} = k$.

Soit

§. 6. Soit $(1 - n \operatorname{coſ.} \eta)^{-\frac{3}{2}} = A + B \operatorname{coſ.} \eta + C \operatorname{coſ.} 2\eta$
$+ D \operatorname{coſ.} 3\eta + \text{etc.}$

& parceque

$$\operatorname{coſ.} y \operatorname{ſin.} z = \tfrac{1}{2} \operatorname{ſin.} (y + z) - \tfrac{1}{2} \operatorname{ſin.} (y - z) \;\&$$
$$\operatorname{coſ.} y \operatorname{coſ.} z = \tfrac{1}{2} \operatorname{coſ.} (y - z) + \tfrac{1}{2} \operatorname{coſ.} (y + z),$$

on aura

$$\begin{aligned} P = {} & A a \operatorname{ſin.} \eta + \tfrac{1}{2} B a \operatorname{ſin.} 2\eta + \tfrac{1}{2} C a \operatorname{ſin.} 3\eta + \tfrac{1}{2} D a \operatorname{ſin.} 4\eta + \text{etc.} \\ & - \tfrac{1}{2} C a \operatorname{ſin.} \eta - \tfrac{1}{2} D a \operatorname{ſin.} 2\eta - \tfrac{1}{2} E a \operatorname{ſin.} 3\eta - \tfrac{1}{2} F a \operatorname{ſin.} 4\eta - \text{etc.} \\ & - k \operatorname{ſin.} \eta \end{aligned}$$

ou bien, ſi l'on met pour abrèger

$$\mathfrak{B} = \tfrac{1}{2} a (2A - C) - k; \quad \mathfrak{C} = \tfrac{1}{2} a (B - D);$$
$$\mathfrak{D} = \tfrac{1}{2} a (C - E); \quad \mathfrak{E} = \tfrac{1}{2} a (D - F); \text{ etc.}$$

on aura pour P la ſérie ſuivante:

$$P = \mathfrak{B} \operatorname{ſin.} \eta + \mathfrak{C} \operatorname{ſin.} 2\eta + \mathfrak{D} \operatorname{ſin.} 3\eta + \mathfrak{E} \operatorname{ſin.} 4\eta + \text{etc.}$$

§. 7. Pour convertir la valeur de Q en ſérie, ſoit

$$Q = A' + B' \operatorname{coſ.} \eta + C' \operatorname{coſ.} 2\eta + D' \operatorname{coſ.} 3\eta + \&c.$$

& parceque

$$\begin{aligned} a \operatorname{coſ.} \eta (1 - n \operatorname{coſ.} \eta)^{-\frac{3}{2}} = {} & + A a \operatorname{coſ.} \eta + \tfrac{1}{2} B a \operatorname{coſ.} 2\eta + \tfrac{1}{2} C a \operatorname{coſ.} 3\eta + \&c. \\ & + \tfrac{1}{2} B a + \tfrac{1}{2} C a \operatorname{coſ.} \eta + \tfrac{1}{2} D a \operatorname{coſ.} 2\eta + \tfrac{1}{2} E a \operatorname{coſ.} 3\eta + \&c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -(1 - n \operatorname{coſ.} \eta)^{-\frac{3}{2}} = {} & - A - B \operatorname{coſ.} \eta - C \operatorname{coſ.} 2\eta - D \operatorname{coſ.} 3\eta - \&c. \\ - k \operatorname{coſ.} \eta = {} & - k \operatorname{coſ.} \eta \end{aligned}$$

on aura pour les coëfficiens A', B', C', &c. ces valeurs:

$$A' = \tfrac{1}{2} B a - A; \quad B' = \tfrac{1}{2} a (2A + C) - B - k;$$
$$C' = \tfrac{1}{2} a (B + D) - C; \quad D' = \tfrac{1}{2} a (C + F) - D; \&c.$$

qui étant déterminés, la ſérie adoptée, ſçavoir:

Q =

$$Q = A' + B' \text{coſ.}\, \eta + C' \text{coſ.}\, 2\,\eta + D' \text{coſ.}\, 3\,\eta + \&c.$$

pourra être miſe en uſage.

§. 8. Pour exprimer par une ſerie ſemblable la valeur de $\frac{ddp}{d\theta^2} + p$, il ne reſte à déterminer que l'intégrale $2\int P\,d\theta$, qui en mettant $d\theta = i\,d\eta$ ſe trouve être

$$2\int P\,d\theta = 2\,i\int P\,d\eta = 2\,\Delta - \tfrac{2i}{1}\mathfrak{B}\,\text{coſ.}\,\eta - \tfrac{2i}{2}\mathfrak{C}\,\text{coſ.}\,2\,\eta - \tfrac{2i}{3}\mathfrak{D}\,\text{coſ.}\,3\,\eta - \&c.$$

à laquelle ſi l'on ajoute $Q - \frac{m}{\mu}$, on aura

$$\frac{ddp}{d\theta^2} + p = A' + 2\,\Delta - \frac{m}{\mu} + (B' - \tfrac{2i}{1}\mathfrak{B})\,\text{coſ.}\,\eta + (C' - \tfrac{2i}{2}\mathfrak{C})\,\text{coſ.}\,2\,\eta + (D' - \tfrac{2i}{3}\mathfrak{D})\,\text{coſ.}\,3\,\eta + \&c.$$

ou bien, ſi l'on met

$$A' + 2\,\Delta - \frac{m}{\mu} = \mathfrak{A}'; \quad B' - \tfrac{2i}{1}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}';$$

$$C' - \tfrac{2i}{2}\mathfrak{C} = \mathfrak{C}'; \qquad D' - \tfrac{2i}{3}\mathfrak{D} = \mathfrak{D}'; \ \&c.$$

on aura

$$\frac{ddp}{d\theta^2} + p = \mathfrak{A}' + \mathfrak{B}'\,\text{coſ.}\,\eta + \mathfrak{C}'\,\text{coſ.}\,2\,\eta + \mathfrak{D}'\,\text{coſ.}\,3\,\eta + \&c.$$

§. 9. Tout dépend maintenant de la valeur de p, qui doit être telle que $\frac{ddp}{d\theta^2} + p$ ſoit égal à la ſerie que nous venons de trouver. Suppoſons cette valeur

$$p = \alpha + \beta\,\text{coſ.}\,\eta + \gamma\,\text{coſ.}\,2\,\eta + \delta\,\text{coſ.}\,3\,\eta + \&c.,$$

& nous aurons

$$\frac{ddp}{d\theta^2} = -\frac{\beta}{ii}\,\text{coſ.}\,\eta - \frac{4\gamma}{ii}\,\text{coſ.}\,2\,\eta - \frac{9\delta}{ii}\,\text{coſ.}\,3\,\eta - \&c.$$

& partant

$$\frac{ddp}{d\theta^2} + p = \alpha + \beta\left(1 - \frac{1}{ii}\right)\text{coſ.}\,\eta + \gamma\left(1 - \frac{4}{ii}\right)\text{coſ.}\,2\,\eta + \delta\left(1 - \frac{9}{ii}\right)\text{coſ.}\,3\,\eta + \&c.$$

ſérie

ſérie qui eſt égale à la précedente, en mettant

$$\alpha = \mathfrak{A}'; \ \beta = \frac{\mathfrak{B}'}{1 - \frac{1}{ii}}; \ \gamma = \frac{\mathfrak{C}}{1 - \frac{4}{ii}}; \ \delta = \frac{\mathfrak{D}}{1 - \frac{9}{ii}}; \ \&c.$$

§. 10. Ayant trouvé p on en déduit facilement $q = \int P d\theta - 2p$, ce qui fournit la ſérie ſuivante:

$$q = \Delta - 2a - (i\mathfrak{B} + 2\beta) \operatorname{coſ} \eta - (\tfrac{1}{2} i \mathfrak{C} + 2\gamma) \operatorname{coſ.} 2\eta$$
$$- (\tfrac{1}{3} i \mathfrak{D} + 2\delta) \operatorname{coſ.} 3\eta + \&c.$$

ou bien en mettant pour abrèger

$$\Delta - 2\alpha = \alpha'; \ i\mathfrak{B} + 2\beta = -\beta';$$
$$\tfrac{1}{2} i \mathfrak{C} + 2\gamma = -\gamma'; \ \tfrac{1}{3} i \mathfrak{D} + 2\delta = -\delta; \ \&c.$$

la lettre q ſera exprimée par cette ſérie:

$$q = \alpha' + \beta' \operatorname{coſ.} \eta + \gamma' \operatorname{coſ.} 2\eta + \delta' \operatorname{coſ.} 3\eta + \varepsilon \operatorname{coſ.} 4\eta + \&c.$$

§. 11. De cette valeur de q on déduit

$$\frac{d\Phi}{d\theta} = 1 + \mu\alpha' + \mu\beta' \operatorname{coſ.} \eta + \mu\gamma' \operatorname{coſ.} 2\eta + \text{etc.}$$

& de là

$$d\Phi = (1 + \mu\alpha') d\theta + \mu i \beta' d\eta \operatorname{coſ.} \eta + \mu i \gamma' d\eta \operatorname{coſ.} 2\eta + \text{etc.}$$

ſérie dont l'intégrale nous fournit d'abord

$$\Phi = (1 + \mu\alpha')\theta + \mu i \beta' \operatorname{ſin.} \eta + \tfrac{1}{2} \mu i \gamma' \operatorname{ſin.} 2\eta$$
$$+ \tfrac{1}{3} \mu i \delta' \operatorname{ſin.} 3\eta + \text{etc.}$$

où le premier terme $(1 + \mu\alpha')\theta$ doit être égal à la longitude moyenne de la Terre θ; nous aurons par conſéquent $\alpha' = \Delta - 2\alpha = 0$, et partant $\Delta = 2\alpha$, et les deux corrections cherchées pour la diſtance & la longitude de la Terre ſeront

$$v - 1 = \mu(\alpha + \beta \operatorname{coſ.} \eta + \gamma \operatorname{coſ.} 2\eta + \delta \operatorname{coſ.} 3\eta + \text{etc.})$$
$$\Phi - \theta = \mu i (\beta' \operatorname{ſin.} \eta + \tfrac{1}{2} \gamma' \operatorname{ſin.} 2\eta + \tfrac{1}{3} \delta' \operatorname{ſin.} 3\eta + \text{etc.})$$

 Pour

§. 12. Pour déterminer maintenant les premiers coëfficiens A, B, C, etc. auxquels tous les autres ſe rapportent jusqu'aux derniers, ſoit

$$(1 - n \operatorname{coſ.} \eta)^{-\frac{3}{2}} = A + B \operatorname{coſ.} \eta + C \operatorname{coſ.} 2\eta + \text{etc.} = V$$

et en prenant les differentielles logarithmiques

$$\frac{dV}{V} = -\frac{3 n d\eta \operatorname{ſin.} \eta}{2(1 - n \operatorname{coſ.} \eta)} = \frac{-B d\eta \operatorname{ſin.} \eta - 2 C d\eta \operatorname{ſin.} 2\eta - \text{etc.}}{A + B \operatorname{coſ.} \eta + C \operatorname{coſ.} 2\eta + D \operatorname{coſ.} 3\eta + \text{etc.}}$$

on aura cette équation:

$$\frac{3 n \operatorname{ſin.} \eta}{1 - n \operatorname{coſ.} \eta} = \frac{2 B \operatorname{ſin.} \eta + 4 C \operatorname{ſin.} 2\eta + 6 D \operatorname{ſin.} 3\eta + \text{etc.}}{A + B \operatorname{coſ.} \eta + C \operatorname{coſ.} 2\eta + D \operatorname{coſ.} 3\eta + \text{etc.}} = \frac{S}{V},$$

ou bien $3 n V \operatorname{ſin.} \eta - S + n S \operatorname{coſ.} \eta = 0$. Or il y a

$$\begin{aligned} 3 n V \operatorname{ſin.} \eta &= 3 n A \operatorname{ſin.} \eta + \tfrac{3}{2} n B \operatorname{ſin.} 2\eta + \tfrac{3}{2} n C \operatorname{ſin.} 3\eta + \text{etc.} \\ &\quad - \tfrac{3}{2} n C \operatorname{ſin.} \eta - \tfrac{3}{2} n D \operatorname{ſin.} 2\eta - \tfrac{3}{2} n E \operatorname{ſin.} 3\eta - \text{etc.} \\ n S \operatorname{coſ.} \eta &= \qquad + n B \operatorname{ſin.} 2\eta + 2 n C \operatorname{ſin.} 3\eta + \text{etc.} \\ &\quad + 2 n C \operatorname{ſin.} \eta + 3 n D \operatorname{ſin.} 2\eta + 4 n E \operatorname{ſin.} 3\eta + \text{etc.} \\ -S &= -2 B \operatorname{ſin.} \eta - 4 D \operatorname{ſin.} 2\eta - 6 D \operatorname{ſin.} 3\eta - \text{etc.} \end{aligned}$$

§. 13. Pour rendre cette expreſſion égale à zero, il faudra faire évanouir chaque terme ſéparément, ce qui fournira les déterminations ſuivantes:

$$\begin{aligned} 3 n A &= 2 B - \tfrac{3}{2} n C, \text{ ou bien } & 3 n \tfrac{A}{B} &= 2 - \tfrac{3}{2} n \tfrac{C}{B} \\ \tfrac{5}{2} n B &= 4 G - \tfrac{3}{2} n D & \tfrac{5}{2} n \tfrac{B}{C} &= 4 - \tfrac{3}{2} n \tfrac{D}{C} \\ \tfrac{7}{2} n C &= 6 D - \tfrac{5}{2} n E & \tfrac{7}{2} n \tfrac{C}{D} &= 6 - \tfrac{5}{2} n \tfrac{E}{D} \\ \tfrac{9}{2} n D &= 8 E - \tfrac{7}{2} n F & \tfrac{9}{2} n \tfrac{D}{E} &= 8 - \tfrac{7}{2} n \tfrac{F}{E} \end{aligned}$$

d'où l'on deduit facilement en fractions continues:

$$a = 3 n \frac{A}{B} = 2 - \cfrac{\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} n n}{4 - \cfrac{\frac{3}{2} \cdot \frac{7}{2} n n}{6 - \cfrac{\frac{5}{2} \cdot \frac{9}{2} n n}{8 - \text{etc.}}}}$$

b =

$$\mathfrak{b} = \tfrac{5}{2} n \frac{B}{C} = 4 - \cfrac{\frac{3}{2} \cdot \frac{7}{2}\, nn}{6 - \cfrac{\frac{5}{2} \cdot \frac{9}{2}\, nn}{8 - \cfrac{\frac{7}{2} \cdot \frac{11}{2}\, nn}{10 - \text{etc.}}}}$$

$$\mathfrak{c} = \tfrac{7}{2} n \frac{C}{D} = 6 - \cfrac{\frac{5}{2} \cdot \frac{9}{2}\, nn}{8 - \cfrac{\frac{7}{2} \cdot \frac{11}{2}\, nn}{10 - \cfrac{\frac{9}{2} \cdot \frac{12}{2}\, nn}{12 - \text{etc.}}}}$$

$$\mathfrak{d} = \tfrac{3}{2} n \frac{D}{E} = 8 - \cfrac{\frac{7}{2} \cdot \frac{11}{2}\, nn}{10 - \cfrac{\frac{9}{2} \cdot \frac{13}{2}\, nn}{12 - \cfrac{\frac{11}{2} \cdot \frac{15}{2}\, nn}{14 - \text{etc.}}}}$$

& en général

$$\mathfrak{y} = (r+\tfrac{3}{2}) n \frac{Y}{Z} = 2(r+1) - \cfrac{(r+\frac{1}{2})(r+\frac{5}{2})\, nn}{2(r+2) - \cfrac{(r+\frac{3}{2})(r+\frac{7}{2})\, nn}{2(r+3) - \cfrac{(r+\frac{5}{2})(r+\frac{9}{2})\, nn}{2(r+4) - \text{etc.}}}}$$

où le nombre r eſt pour la fraction $\mathfrak{b}$ égal à 1; pour la fraction $\mathfrak{c}$ il eſt $= 2$; pour $\mathfrak{d}$ il y a $r = 3$, & ainſi de ſuite. Et ſi ce nombre r eſt aſſés grand, au lieu de cette fraction continue on pourra ſe ſervir, ſans ſe tromper ſenſiblement dans les premières lettres $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, etc. de la fraction ſuivante:

$$\mathfrak{y} = (r+\tfrac{3}{2}) n \frac{Y}{Z} = 2(r+1) - \cfrac{(r+1)(r+2)\, nn}{2(r+2) - \cfrac{(r+2)(r+3)\, nn}{2(r+3) - \cfrac{(r+3)(r+4)\, nn}{2(r+4) - \text{etc.}}}}$$

qui

qui diviſée par $r + 1$ & déprimée ſe reduit à

$$\frac{r+\frac{1}{2}}{r+1}\, n\, \frac{Y}{Z} = s = 2 - \cfrac{nn}{2 - \cfrac{nn}{2 - \cfrac{nn}{2 - \text{etc.}}}} = 2 - \frac{nn}{s},$$

doù l'on tire

$$ss = 2s - nn \ \& \ s = 1 + \sqrt{(1 - nn)}$$

ce qui donne

$$\mathfrak{y} = (r + 1)(1 + \sqrt{(1 - nn)})$$

Ayant trouvé cette valeur, il ſera facile de déterminer, en remontant, les valeurs des caractères $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, &c. Car il y a

$$\mathfrak{a} = 2 - \frac{1.5\,nn}{4\mathfrak{b}};\ \mathfrak{b} = 4 - \frac{3.7\,nn}{4\mathfrak{c}};\ \mathfrak{c} = 6 - \frac{5.9\,nn}{4\mathfrak{d}};\ \text{etc.}$$

d'où l'on tire enſuite les coëfficiens cherchés

$$B = \frac{3nA}{\mathfrak{a}};\ C = \frac{5nB}{2\mathfrak{b}};\ D = \frac{7nC}{2\mathfrak{c}};\ E = \frac{9nD}{2\mathfrak{d}};\ \&c.$$

§. 14. Il ne reſte donc plus que la lettre A à determiner, pour laquelle il faut avoir recours au développement actuel du binome, qui donne

$$(1 - n\cos.\eta)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \tfrac{3}{2} n \cos.\eta + \tfrac{3.5}{2.4} n^2 \cos.\eta^2 + \tfrac{3.5.7}{2.4.6} n^3 \cos.\eta^3 + \&c.$$

Or il y a par les transformations connues

$$\cos.\eta^2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos.2\eta$$

$$\cos.\eta^3 = \tfrac{3}{4}\cos.\eta + \tfrac{1}{4}\cos.3\eta$$

$$\cos.\eta^4 = \tfrac{1.3}{2.4} + \tfrac{4}{8}\cos.2\eta + \tfrac{1}{8}\cos.4\eta$$

$$\cos.\eta^5 = \tfrac{5}{8}\cos.\eta + \tfrac{5}{16}\cos.3\eta + \tfrac{1}{16}\cos.5\eta$$

$$\cos.\eta^6 = \tfrac{1.3.5}{2.4.6} + \tfrac{15}{32}\cos.2\eta + \tfrac{6}{32}\cos.4\eta + \tfrac{1}{32}\cos.6\eta$$

&c.

d'où

d'où l'on obtient, en prenant les termes abſolus

$$A = 1 + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3.5}{2.4} n^2 + \tfrac{1.3}{2.4} \cdot \tfrac{3.5.7.9}{2.4.6.8} n^4 + \tfrac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \tfrac{3.5.7.9.11.13}{2.4.6.8.10.12} n^6 + \&c.$$

& cette expreſſion ſe reduit facilement à celle-ci:

$$A = 1 + \tfrac{3.5}{4.4} n^2 + \tfrac{3.5}{4.4} \cdot \tfrac{7.9}{8.8} n^4 + \tfrac{3.5}{4.4} \cdot \tfrac{7.9}{8.8} \cdot \tfrac{11.13}{12.12} n^6 + \&c.$$

Mais cette ſérie eſt trop peu convergente, pour qu'on puiſſe s'en ſervir avec ſuccès. Voilà pourtant un moyen très facile de la rendre aſſéz convergente.

Puisque $A = 1 + \tfrac{3.5}{4.4} n^2 + \tfrac{3.5}{4.4} \cdot \tfrac{7.9}{8.8} n^4 + \tfrac{3.5}{4.4} \cdot \tfrac{7.9}{8.8} \cdot \tfrac{11.13}{12.12} n^6 + \&c.$

on aura $nnA = nn + \tfrac{3.5}{4.4} n^4 + \tfrac{3.5}{4.4} \cdot \tfrac{7.9}{8.8} n^6 + \&c.$

& la différence de ces deux ſéries nous fournira

$$(1 - nn) A = 1 - \tfrac{1}{16} n^2 - \tfrac{1}{64} \cdot \tfrac{3.5}{4.4} n^4 - \tfrac{1}{144} \cdot \tfrac{3.5}{4.4} \cdot \tfrac{7.9}{8.8} n^6 - \&c.$$

& nous aurons enfin pour A cette expreſſion:

$$A = \frac{1}{1 - nn} \left(1 - \tfrac{1.1}{4.4} n^2 - \tfrac{1.1}{4.4} \cdot \tfrac{3.5}{8.8} n^4 - \tfrac{1.1}{4.4} \cdot \tfrac{3.5}{8.8} \cdot \tfrac{7.9}{12.12} n^6 - \&c.\right)$$

car on voit qu'on n'a qu'à changer l'ordre des dénominateurs 4. 4; 8. 8; 12. 12; &c. ce qui facilite le calcul numérique des coëfficiens, que nous allons faire.

§. 15. Pour cet effet il faut connoître la valeur de a qui eſt ſuivant *Halley* $a = 0,72333$, d'où l'on tire

$$n = \frac{2a}{1 + aa} = 0,94975 \quad \text{et} \quad l\,n = 9,977608$$

& partant

	Coëfficiens	Logarithmes	Termes
$l\,n^2 = 9,955216$	0, 062500	8, 795880	0, 05638
$l\,n^4 = 9,910432$	0, 014648	8, 165778	0, 01192
$l\,n^6 = 9,865648$	0, 006409	7, 806769	0, 00470
$l\,n^8 = 9,820864$	0, 003580	7, 553865	0, 00237
$l\,n^{10} = 9,776080$	0, 002282	7, 358346	0, 00136
$l\,n^{12} = 9,731296$	0, 001581	7, 198896	0, 00085
$l\,n^{14} = 9,686512$	0, 001159	7, 064248	0, 00056
$l\,n^{16} = 9,641728$	0, 000887	7, 947709	0, 00039
$l\,n^{18} = 9,596944$	0, 000700	7, 844950	0, 00028
$l\,n^{20} = 9,552160$	0, 000566	7, 753130	0, 00020
$l\,n^{22} = 9,507376$	0, 000468	7, 670073	0, 00015
$l\,n^{24} = 9,462592$	0, 000393	7, 594271	0, 00011

La ſomme de ces douze termes fait 0, 07937, à laquelle ſi l'on ajoute pour les ſuivans 0, 00033, on aura

$$A = \frac{1 - 0,07970}{1 - nn} = \frac{0,92030}{1 - nn} = 9,3927.$$

§. 16. Pour les caractères $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, &c. nous nous arrêterons au quinzième $\mathfrak{p}$, où $r = 14$, & nous aurons

$$\mathfrak{p} = 15\,(1 + \sqrt{(1 - nn)}) = 19,6953$$
$$\mathfrak{o} = 28 - \frac{27.31\,nn}{4\,\mathfrak{p}} = 18,4166$$
$$\mathfrak{n} = 26 - \frac{25.29\,nn}{4\,\mathfrak{o}} = 17,1226$$
$$\mathfrak{m} = 24 - \frac{23.27\,nn}{4\,\mathfrak{n}} = 15,8214$$
$$\mathfrak{l} = 22 - \frac{21.25\,nn}{4\,\mathfrak{m}} = 14,5171$$
$$\mathfrak{k} = 20 - \frac{19.23\,nn}{4\,\mathfrak{l}} = 13,2117$$
$$\mathfrak{i} = 18 - \frac{17.21\,nn}{4\,\mathfrak{k}} = 11,9065$$
$$\mathfrak{h} = 16 - \frac{15.19\,nn}{4\,\mathfrak{i}} = 10,6022$$
$$\mathfrak{g} = 14 - \frac{13.17\,nn}{4\,\mathfrak{h}} = 9,2994$$

$\mathfrak{f} =$

$$\mathfrak{f} = 12 - \frac{11\cdot15\,nn}{4\,\mathfrak{g}} = 7,9989$$
$$\mathfrak{e} = 10 - \frac{9\cdot13\,nn}{4\,\mathfrak{f}} = 6,7015$$
$$\mathfrak{d} = 8 - \frac{7\cdot11\,nn}{4\,\mathfrak{e}} = 5,4090$$
$$\mathfrak{c} = 6 - \frac{5\cdot9\,nn}{4\,\mathfrak{d}} = 4,1239$$
$$\mathfrak{b} = 4 - \frac{3\cdot7\,nn}{4\,\mathfrak{c}} = 2,8517$$
$$\mathfrak{a} = 2 - \frac{1\cdot5\,nn}{4\,\mathfrak{b}} = 1,6046$$

Il auroit ſuffi, à la verité, de s'arrêter au caractère $\mathfrak{i}$ ou $\mathfrak{f}$; mais comme les expreſſions ſont très ſimples, j'ai trouvé mieux d'aller un peu plus loin, d'autant que tout le reſte de notre calcul dépend de ces quantités $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, &c.

§. 17. Ces valeurs étant trouvés, on en déduit les coëfficiens du binome qui, en y joignant le premier, ſeront

$A = \frac{0,9203}{1 - nn} = 9,3927$	$F = \frac{11\,n\,E}{2\,\mathfrak{e}} = 6,8940$
$B = \frac{3\,n\,A}{\mathfrak{a}} = 16,6783$	$G = \frac{13\,n\,F}{2\,\mathfrak{f}} = 5,3207$
$C = \frac{5\,n\,B}{2\,\mathfrak{b}} = 13,8868$	$H = \frac{15\,n\,G}{2\,\mathfrak{g}} = 4,0755$
$D = \frac{7\,n\,C}{2\,\mathfrak{c}} = 11,1936$	$I = \frac{17\,n\,H}{2\,\mathfrak{h}} = 3,1032$
$E = \frac{9\,n\,D}{2\,\mathfrak{d}} = 8,8445$	&c.

§. 18. La quantité k, qui entre dans la détermination des coëfficiens $\mathfrak{B}$ et B' ſe trouve

$$k = \frac{(1 + aa)^{\frac{3}{2}}}{aa} = 3,5931$$

& la ſuite de ces coëfficiens ſera:

 $\mathfrak{B} =$

$\mathfrak{B} = \frac{1}{2}a(2A - C) - k = -1,8214$	$A' = \frac{1}{2}aB - A = -3,3607$
$\mathfrak{C} = \frac{1}{2}a(B - D) = +1,9840$	$B' = \frac{1}{2}a(2A + C) - B - k = -8,4549$
$\mathfrak{D} = \frac{1}{2}a(C - E) = +1,8236$	$C' = \frac{1}{2}a(B + D) - C = -3,8065$
$\mathfrak{E} = \frac{1}{2}a(D - F) = +1,5550$	$D' = \frac{1}{2}a(C + E) - D = -2,9724$
$\mathfrak{F} = \frac{1}{2}a(E - G) = +1,2744$	$E' = \frac{1}{2}a(D + F) - E = -2,3028$
$\mathfrak{G} = \frac{1}{2}a(F - H) = +1,0194$	$F' = \frac{1}{2}a(E + G) - F = -1,7709$
$\mathfrak{H} = \frac{1}{2}a(G - I) = +0,8020$	$G' = \frac{1}{2}a(F + H) - G = -1,3534$
&c.	$H' = \frac{1}{2}a(G + I) - H = -1,0289$
	&c.

§. 19. Dans les coëfficiens ſuivans il entre la quantité

$$\frac{m}{\mu} = (1 + aa)^{\frac{3}{2}} = 1,8799,$$

& la quantité $i = \frac{d\theta}{d\eta}$. Pour déterminer celle-ci il faut remarquer, qu'en regardant le mouvement des deux Planètes comme uniforme, il y aura $\frac{d\Phi}{d\theta} = 1$ & $\frac{d\psi}{d\theta} = \frac{5768}{3548}$, le mouvement diurne de Venus étant $1°.\ 36'.\ 8'' = 5768''$ & celui de la Terre $59'.\ 8'' = 3548''$. On aura donc

$\frac{d\eta}{d\theta} = \frac{d\psi}{d\theta} - \frac{d\Phi}{d\theta} = \frac{2220}{3548}$ & partant

$i = \frac{3548}{2220} = 1,59819$. Donc les coëfficiens:

$\mathfrak{A}' = A' + 2\Delta - \frac{m}{\mu} = 2\Delta - 5,2406$	$\mathfrak{E}' = E' - \frac{2i}{4}\mathfrak{E} = -3,5454$
$\mathfrak{B}' = B' - \frac{2i}{1}\mathfrak{B} = -2,6330$	$\mathfrak{F}' = F' - \frac{2i}{5}\mathfrak{F} = -2,5856$
$\mathfrak{C}' = C' - \frac{2i}{2}\mathfrak{C} = -6,9773$	$\mathfrak{G}' = G' - \frac{2i}{6}\mathfrak{G} = -1,8964$
$\mathfrak{D}' = D' - \frac{2i}{3}\mathfrak{D} = -4,9153$	$\mathfrak{H}' = H' - \frac{2i}{7}\mathfrak{H} = -1,3951$
	&c.

§. 20. Par rapport à la conſtante Δ il faut remarquer que, puisque $\alpha' = \Delta - 2\alpha = 0$ & $\alpha = \mathfrak{A}'$, il y aura

$\alpha = \frac{1}{2}\Delta = \mathfrak{A}' = 2\Delta - 5,2406$

&

& partant $\Delta = 3,4937$. Nous aurons donc enfin

$\alpha = \mathfrak{A}' = 1,747$	$\beta' = -(2\beta + i\mathfrak{B}) = +11,565$
$\beta = \frac{\mathfrak{B}'}{1-\frac{1}{ii}} = -4,327$	$\frac{1}{2}\gamma' = -\frac{1}{2}(2\gamma + \frac{1}{2}i\mathfrak{C}) = -13,120$
$\gamma = \frac{\mathfrak{C}'}{1-\frac{4}{ii}} = 12,327$	$\frac{1}{3}\delta' = -\frac{1}{3}(2\delta + \frac{1}{3}i\mathfrak{D}) = -1,622$
$\delta = \frac{\mathfrak{D}'}{1-\frac{9}{ii}} = 1,948$	$\frac{1}{4}\varepsilon' = -\frac{1}{4}(2\varepsilon + \frac{1}{4}i\mathfrak{E}) = -0,492$
$\varepsilon = \frac{\mathfrak{E}'}{1-\frac{16}{ii}} = 0,673$	$\frac{1}{5}\zeta' = -\frac{1}{5}(2\zeta + \frac{1}{5}i\mathfrak{F}) = -0,199$
$\zeta = \frac{\mathfrak{F}'}{1-\frac{25}{ii}} = 0,294$	$\frac{1}{6}\eta' = -\frac{1}{6}(2\eta + \frac{1}{6}i\mathfrak{G}) = -0,093$
$\eta = \frac{\mathfrak{G}'}{1-\frac{36}{ii}} = 0,145$	$\frac{1}{7}\theta' = -\frac{1}{7}(2\theta + \frac{1}{7}i\mathfrak{H}) = -0,041$
&c.	&c.

§. 21. Ces valeurs étant trouvées, les corrections cherchées ſeront

$$v - 1 = \mu\,(\alpha + \beta\,\text{coſ.}\,\eta + \gamma\,\text{coſ.}\,2\,\eta + \delta\,\text{coſ.}\,3\,\eta + \&c.)$$

$$\Phi - \theta = \mu i\,(\beta'\,\text{ſin.}\,\eta + \tfrac{1}{2}\gamma'\,\text{ſin.}\,2\,\eta + \tfrac{1}{3}\delta'\,\text{ſin.}\,3\,\eta + \&c.)$$

où, en mettant la diſtance moyenne de la Terre au Soleil $= 1000000$, il y a $\mu = 1,519$ & $\mu i = 0,501''$, d'où il ſera facile de calculer la table ſuivante, en donnant à l'angle η ſucceſſivement les valeurs 0°, 10°, 20°, 30°, &c.

§. 22. Cette table convient parfaitement, quant à la forme, avec celle de feu M. *de la Caille*. Quant à la correction des Longitudes, elle eſt plus petite dans la

 miennne

mienne d'un tiers à peu près. Les corrections de diſtances ne diffèrent pas tant: La plus grande correction étant d'après *de la Caille* de 31 & 26 d'après ma table.

§. 23. En comparant notre table avec celle de M. *Lexell*, nous voyons que les corrections des Longitudes ſont les mêmes dans l'une & l'autre: La petite différence dans celles des longitudes n'eſt d'aucune conſéquence.

§. 24. Si nous confrontons cette nouvelle table avec celle que j'ai calculée autrefois ſur les mêmes principes, nous voyons que les legères différences qui s'y trouvent, ne peuvent venir que des valeurs de *a* & de *m* un peu différentes de celles que j'avois adoptées en calculant la première table.

§. 25. Tant que nous ne ſerons pas mieux inſtruits ſur la maſſe de Venus, l'une & l'autre de ces deux nouvelles tables, calculées en différent tems, par deux différentes perſonnes &, ce qui plus eſt, d'après deux méthodes entièrement différentes, doit donc meriter la confiance la plus entière des Aſtronomes.

+	−	+	+	D
10, 6	1, 1	7, 9	17, 4	30
10, 6	0, 4	7, 8	17, 9	29
10, 6	+	7, 6	18, 4	28
10, 6	0, 9	7, 3	18, 9	27
10, 5	1, 5	7, 1	19, 4	26
10, 5	2, 1	6, 9	19, 9	25
10, 5	2, 7	6, 8	20, 3	24
10, 5	3, 3	6, 5	20, 7	23
10, 5	4, 0	6, 3	21, 1	22
10, 4	4, 7	6, 0	21, 5	21
10, 4	5, 4	5, 7	21, 9	20
10, 4	6, 1	5, 4	22, 2	19
10, 3	6, 8	5, 1	22, 5	18
10, 3	7, 5	4, 9	22, 8	17
10, 2	8, 2	4, 6	23, 1	16
10, 1	8, 8	4, 3	23, 4	15
10, 0	9, 4	4, 1	23, 7	14
9, 9	10, 0	3, 8	24, 0	13
9, 8	10, 6	3, 5	24, 3	12
9, 7	11, 2	3, 2	24, 5	11
9, 6	11, 8	3, 0	24, 7	10
9, 4	12, 4	2, 7	24, 9	9
9, 3	13, 0	2, 4	25, 1	8
9, 1	13, 6	2, 1	25, 2	7

TABLE DES CORRECTIONS DU LIEU DE LA TERRE
DÉRANGÉ PAR L'ACTION DE VENUS.

ARGUMENT:
DIFFÉRENCE DES LONGITUDES HELIOCENTRIQUES DE ♀ ET ♁.

Sign.	0		I		II		III		IV		V		Sign.
Degr.	Long. −	Dist. +	Long −	Dist. +	Long. −	Dist. −	Long. +	Dist. −	Long. +	Dist. −	Long. +	Dist. +	Degr.
0	0, 0	19, 7	3, 9	5, 1	0, 4	13, 1	6, 5	15, 2	10, 6	1, 1	7, 9	17, 4	30
1	0, 2	19, 6	3, 8	4, 2	0, 2	13, 5	6, 7	14, 9	10, 6	0, 4	7, 8	17, 9	29
2	0, 4	19, 5	3, 8	3, 3	+	14, 0	6, 9	14, 6	10, 6	+	7, 6	18, 4	28
3	0, 6	19, 4	3, 8	2, 4	0, 2	14, 3	7, 2	14, 3	10, 6	0, 9	7, 3	18, 9	27
4	0, 8	19, 3	3, 8	1, 5	0, 4	14, 6	7, 4	14, 0	10, 5	1, 5	7, 1	19, 4	26
5	1, 0	19, 1	3, 7	0, 6	0, 7	14, 9	7, 6	13, 7	10, 5	2, 1	6, 9	19, 9	25
6	1, 2	18, 8	3, 7	——	0, 9	15, 1	7, 7	13, 4	10, 5	2, 7	6, 8	20, 3	24
7	1, 4	18, 5	3, 6	0, 6	1, 1	15, 5	7, 9	13, 1	10, 5	3, 3	6, 5	20, 7	23
8	1, 6	18, 2	3, 6	1, 1	1, 3	15, 7	8, 1	12, 7	10, 5	4, 0	6, 3	21, 1	22
9	1, 8	17, 9	3, 5	1, 6	1, 6	15, 9	8, 3	12, 3	10, 4	4, 7	6, 0	21, 5	21
10	2, 0	17, 6	3, 4	2, 1	1, 8	16, 0	8, 5	11, 9	10, 4	5, 4	5, 7	21, 9	20
11	2, 1	17, 2	3, 3	2, 7	2, 1	16, 1	8, 6	11, 5	10, 4	6, 1	5, 4	22, 2	19
12	2, 3	16, 7	3, 2	3, 3	2, 3	16, 2	8, 8	11, 0	10, 3	6, 8	5, 1	22, 5	18
13	2, 4	16, 2	3, 1	3, 9	2, 5	16, 3	8, 9	10, 5	10, 3	7, 5	4, 9	22, 8	17
14	2, 6	15, 7	3, 0	4, 5	2, 8	16, 4	9, 1	10, 0	10, 2	8, 2	4, 6	23, 1	16
15	2, 7	15, 2	2, 9	5, 1	3, 0	16, 5	9, 2	9, 5	10, 1	8, 8	4, 3	23, 4	15
16	2, 9	14, 7	2, 8	5, 7	3, 3	16, 6	9, 4	9, 0	10, 0	9, 4	4, 1	23, 7	14
17	3, 0	14, 1	2, 7	6, 3	3, 5	16, 6	9, 5	8, 5	9, 9	10, 0	3, 8	24, 0	13
18	3, 1	13, 5	2, 5	6, 9	3, 7	16, 7	9, 6	8, 0	9, 8	10, 6	3, 5	24, 3	12
19	3, 2	12, 8	2, 4	7, 5	4, 0	16, 7	9, 7	7, 5	9, 7	11, 2	3, 2	24, 5	11
20	3, 4	12, 1	2, 2	8, 2	4, 2	16, 7	9, 9	7, 0	9, 6	11, 8	3, 0	24, 7	10
21	3, 4	11, 4	2, 1	8, 8	4, 5	16, 6	10, 0	6, 5	9, 4	12, 4	2, 7	24, 9	9
22	3, 5	10, 7	1, 9	9, 4	4, 7	16, 6	10, 1	5, 9	9, 3	13, 0	2, 4	25, 1	8
23	3, 6	10, 0	1, 7	10, 0	4, 9	16, 5	10, 2	5, 3	9, 1	13, 6	2, 1	25, 2	7
24	3, 6	9, 3	1, 6	10, 5	5, 2	16, 4	10, 2	4, 7	8, 9	14, 2	1, 8	25, 3	6
25	3, 7	8, 7	1, 4	11, 0	5, 4	16, 2	10, 3	4, 1	8, 8	14, 8	1, 5	25, 4	5
26	3, 7	8, 0	1, 2	11, 5	5, 6	16, 0	10, 4	3, 5	8, 6	15, 4	1, 2	25, 5	4
27	3, 8	7, 3	1, 0	11, 9	5, 9	15, 8	10, 4	2, 9	8, 5	15, 9	0, 9	25, 6	3
28	3, 8	6, 6	0, 8	12, 3	6, 1	15, 6	10, 5	2, 3	8, 3	16, 4	0, 6	25, 6	2
29	3, 8	5, 9	0, 6	12, 7	6, 3	15, 4	10, 5	1, 7	8, 1	16, 9	0, 3	25, 7	1
30	3, 9	5, 1	0, 4	13, 1	6, 5	15, 2	10, 6	1, 1	7, 9	17, 4	0, 0	25, 7	0
Degr.	+ Long.	+ Dist.	+ Long.	− Dist.	− Long.	− Dist.	− Long.	− Dist.	− Long.	+ Dist.	− Long.	+ Dist.	Degr.
Sign.	XI		X		IX		VIII		VII		VI		Sign.

LOCVS LVNAE
EX OCCVLTATIONE γ VIRGINIS ANNO 1780. DIE $\frac{9}{20}$ MARTII OBSERVATA DETERMINATVS.

Auctore
STEPHANO RUMOVSKI.

Horologii, ad quod occultationem γ Virginis obſeruaui motum fuiſſe vniformem concluſi ex altitudinibus Solis correſpondentibus, reperi enim:

Die 5. Martii ſt. vet. merid. verum		$0^h. 2'. 34'', 4$
—— 9. ——	- - - -	0. 3. 58, 4
—— 10. ——	- - - - -	0. 4 18, 4

Hinc acceleratio horologii ſpatio diei Solaris medii a die 5 ad 9 Martii colligitur $39''$, 1 et a die 9 ad 10 Martii $38''$. 8.

Die $\frac{9}{20}$ Martii.

Immerſio γ ♍ ad limbum ☽ lucidum $14^h. 26'. 59''$. t. h.
Emerſio eiusdem ad limbum obſcurum 15. 25. 52.

Momentum primum certum eſt ad vnum minutum ſecundum, poſterius vero non item, quia oculo non in id ipſum punctum, ad quod Emerſio contigit, directo ſtellam exili iam interuallo a limbo Lunae ſeiunctam conſpexi; vera

vera igitur Emerſio aliquot ſecundis, attamen paucis, a me obſeruatam praeceſſerit neceſſe eſt.

Momentis horologii ad tempus verum reductis habebitur

Petropoli	Immerſio γ ♍	- - -	$14^h. 22'. 48''$.
	Emerſio	- - - - -	15. 21. 41.

Eadem occultatio obſeruata eſt

Stockholmiae	Immerſio	- - -	13. 25. 13.
——	Emerſio	- - -	14. 28. 28.
Gedani	Immerſio	- - -	13. 33. 47.
——	Emerſio	- - -	14. 38. 4.

conferatur Calendarium aſtronomicum Berolinenſe pro anno 1783 pag. 112 et 152.

Antequam ad concluſiones ex obſeruationibus his deducendas progrediar, non abs re erit, vt Elementa locum ſtellae et Lunae ſpectantia ob oculos ponam. Ex Calendario aſtronomico Berolinenſi pro anno 1780 Longitudo ſtellae pro initio anni eſt $6^s. 7^\circ. 6'. 16''$. et ob Praeceſſionem + $11''$, Aberrationem + $19'', 9$ et Nutationem — $1'', 2$ Longitudo ſtellae ad tempus obſeruationis ſit $6^s. 7^\circ. 6'. 45'', 7$. Latitudo vero $2^\circ. 48'. 56''$. Bor. Porro ex Tabulis *Maieri* Londini editis die ? Martii $12^h. 22'. 44''$ ſiue $12^h. 30'$. tempore medio Grenovicenſi eſt:

Longitudo ☉lis media - -	11^s.	29°.	$7'$.	$12''$, 9	
Longitudo ☉lis vera - -	0.	1.	1.	3, 4	
Motus horarius ☉lis - -			2.	27, 8	
Obliquitas Eclipticae - -		23.	28.	10, 5	
Longitudo ☽ vera - -	6.	6.	43.	54, 6	
Latitudo ☽ Bor. - -		3.	45.	24, 7	
Motus horar. ☽ in Longit.			36.	58,	
in Latit.		—	2.	13, 2	
Parall. aequat. - - -			60.	30,	
Diam. ☽ horiz. - - -			32.	58, 3	

Poſito

Poſita iam differentia meridianorum Petropolitani et Grenovicenſis $2^h. 1'. 16''$. ratione diametri aequatoris ad axem telluris = 201 : 200 pro Immerſione Petropoli obſeruata reperi Parallaxin Lunae in Longitudinem $+ 6'. 58''$. 2 in Latitudinem $- 53'. 42'', 8$. Diametrum Lunae apparentem $33'. 14'', 2$ et denotantibus δ, y et π correctiones, quas Diameter, Latitudo et Parallaxis Lunae horizontalis admittere poſſunt, tempus verum coniunctionis ex Immerſione prodit:

$$15^h. 0'. 44'' + 1.64\,\delta - 0,27\,y + 0,43\,\pi.$$

Pro Emerſione vero computo inſtituto reperi Parallaxin in Longitudinem $+ 3'. 30'', 4$, in Latitudinem $- 56'. 13'', 9$. Diametrum Lunae apparentem $33'. 11'', 3$ et tempus verum coniunctionis:

$$15^h. 0'. 36'' - 1.63\,\delta + 0,18\,y + 0,08\,\pi$$

Hinc $8'' + 3,27\,\delta - 0,45\,y + 0,35\,\pi = 0$.

Immerſio Stockholmiae obſeruata ſimilem in modum ad computum reuocata, poſita Longitudine illius a meridiano Grenouicenſi $1^h. 12'. 8''$, dat Parallaxin Lunae in Longitudinem $+ 13'. 15''$, in Latitudinem $- 50'. 39'', 1$. Diametrum Lunae apparentem $33'. 16'', 1$ et tempus verum coniunctionis:

$$14^h. 11'. 49'' + 1,75\,\delta - 0,65\,y + 0,90\,\pi$$

Pro Emerſione autem reperitur Parallaxis Lunae in Longitudinem $+ 6'. 13'', 4$ in Latitudinem $- 53'. 49''$, Diameter Lunae apparens $33'. 14''$: Hinc tempus verum coniunctionis:

$$14^h. 11'. 36'' - 1,62\,\delta + 0,06\,y + 0,10\,\pi$$

ac tandem

$$13'' + 3,37\,\delta - 0,71\,y + 0,80\,\pi = 0.$$

 Pro

Pro Immerſione Gedani obſeruata, poſita illius Longitudine a Grenouico $1^h. 14'. 0''$ inuenitur Parallaxis Lunae in Longitudinem $+ 9'. 54'', 4$ in Latitudinem $- 48'. 57'', 2$, Diameter Lunae apparens $33'. 15'', 3$ et tempus verum coniunctionis

$$14^h. 13'. 55'' + 1,82\,\delta - 0,83\,y + 0,94\,\pi.$$

Emerſio autem dat tempus verum coniunctionis $14^h. 19'. 27''$, quae licet pro exacte obſeruata in Calendario aſtronomico Berolinenſi annuncietur, attamen illam ad aliquot minuta prima erroneam eſſe exinde patet, quod momentum coniunctionis ex ea deductum plus, quam par eſt, differat a momento coniunctionis ex Immerſione elicito, et quod differentia meridianorum Stockholmiam et Gedanum inter ex Emerſione $7'. 51''$. reſultet, cum per alias obſeruatio es conſtet eam duo minuta prima non ſuperare. Sepoſita itaque obſeruatione Gedanenſi remanebunt ſequentes aequationes adimplendae:

$$8'' + 3,27\,\delta - 0,46\,y + 0,35\,\pi = 0$$

$$13 + 3,37\,\delta - 0,71\,y + 0,80\,\pi = 0.$$

Quibus, ſi ponatur $\pi = 0$, ſatisfaciunt $\delta = 0'', 4$ et $y = 20''$, poſito vero $\pi = 1$ prodit $\delta = 0, 5$ et $y = 22''$, aſt cum per varias disquiſitiones Celeber. *Lexell* Diametrum Lunae e Tabulis depromtam minuendam potius quam augendam eſſe conſtet, vero ſimile eſt alterutrius harum aequationum numerum abſolutum correctione aliqua indigere, vt pro δ prodeat valor negatiuus; admiſſo vero exiguo errore in Emerſione Petropoli obſeruata requiſito hoc ſatis fieri poterit; poſito enim veram Emerſionem Petropoli, prout ſuadet circumſtantia ſupra commemorata, duobus minutis ſecundis praeceſſiſſe illam, quae in computo hoc eſt adhibi-

ta,

ta, et retento $\pi = 0$ prodibunt eiusmodi aequationes, quibus ſatis fit $\delta = 1'', 5$ et $y = + 11''$. poſito vero Emerſionem tribus minutis ſecundis iuſto tardius eſſe obſeruatam reperitur $\delta = - 2'', 4$ et $y = + 8''$. Hinc momenta pro tempore coniunctionis et differentia meridianorum Petropolitani et Stockholmienſis habebunt ſe vt ſequitur:

	Temp. coniunct.	Differ. merid.
Petropoli ex Immerſione	$15^h. 0'. 38''$.	$0^h. 48'. 58''$.
ex Emerſione	15. 0. 38.	0. 48. 58.
Stockholm. ex Immerſione	14. 11. 40.	
ex Emerſione	14. 11. 40.	

Retentis valoribus $\delta = - 2'', 4$ et $y = + 8''$. Immerſio Gedani obſeruata dat tempus coniunctionis $14^h. 13'. 44''$. Hinc Longitudo illius a Petroburgo prodit $46'. 54''$ verſus occaſum et a Stockholmia $2'. 44''$ verſus ortum. Poſita iam Longitudine Stockholmiae a Grenouico $1^h. 12'. 8''$ tempus verum coniunctionis ad meridianum Grenouicenſem habetur $12^h. 59'. 32''$, pro quo Longitudo Lunae eſt $6^s. 7^\circ. 6'. 34'', 6$ et cum Longitudo ſtellae ſit $6^s. 7^\circ. 6'. 45'', 7$ concluditur correctio Tabularum in Longitudinem $+ 11''$; quodſi Longitudo Stockholmiae a Grenouico ſtatuatur maxima, quam praebent non nullae obſeruationes ſc. $1^h. 12' 24''$ prodit correctio Tabularum in Longitudinem $+ 20'', 4$. Ex quo apparet correctionem Tabularum in Longitudinem pro tempore obſeruationis non maiorem $+ 20''$ nec minorem $+ 11''$, in Latitudinem vero $+ 8''$ aut $+ 11''$ ſtatui debere.

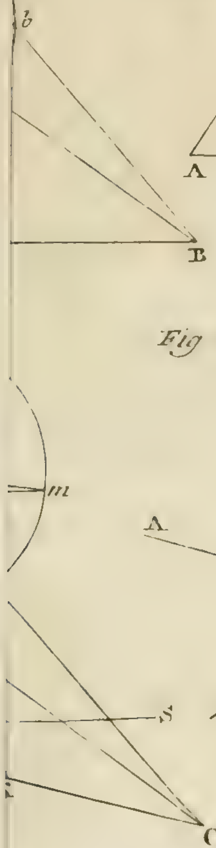


Fig. 2.

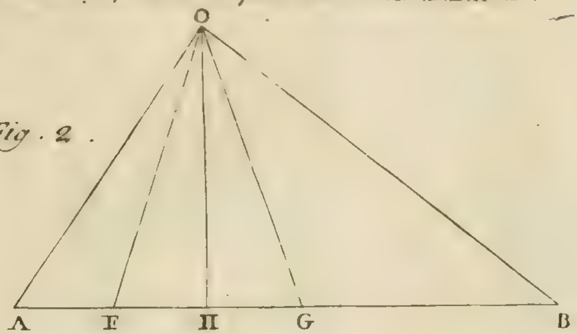


Fig 4.

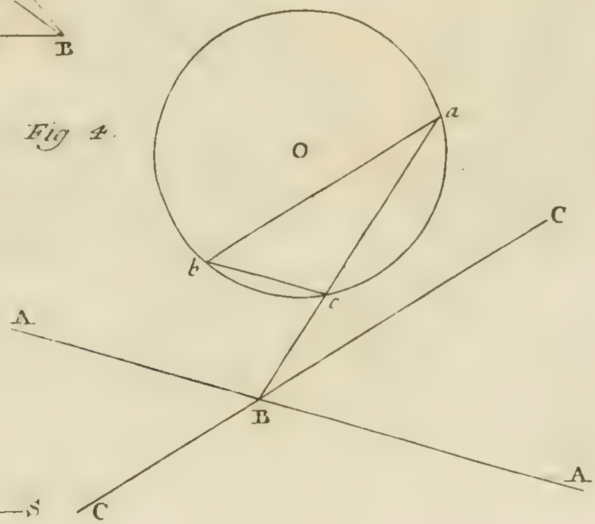


Fig. 6.

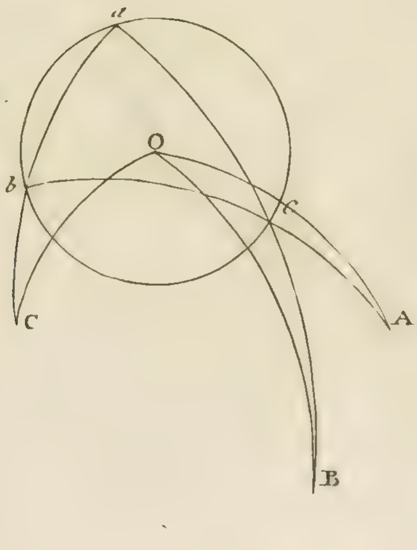


Fig. 5.

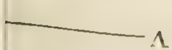


Fig 1

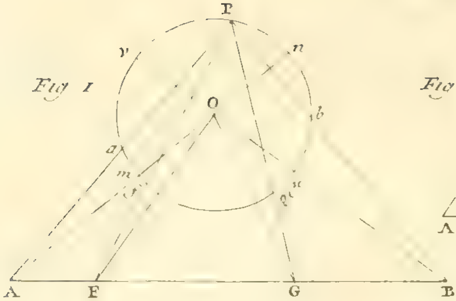


Fig. 2.

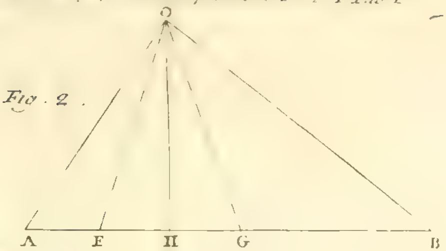


Fig 3

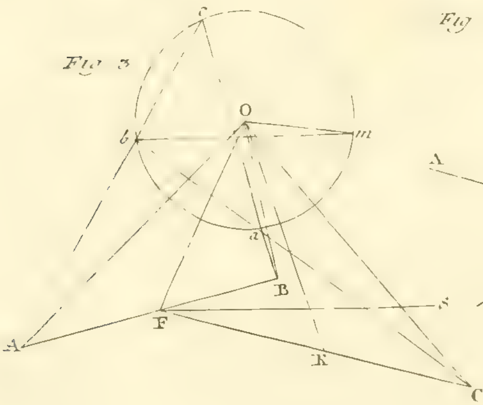


Fig 4

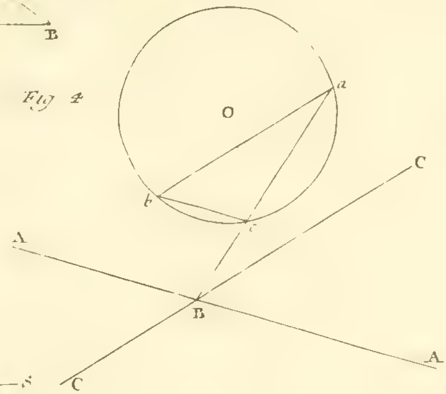


Fig. 5.

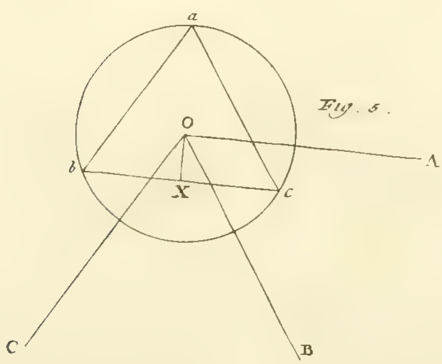
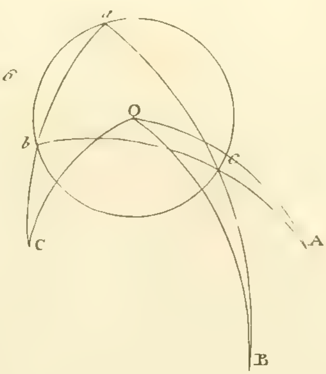


Fig 6



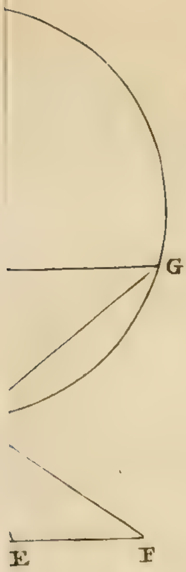


Fig. 2.

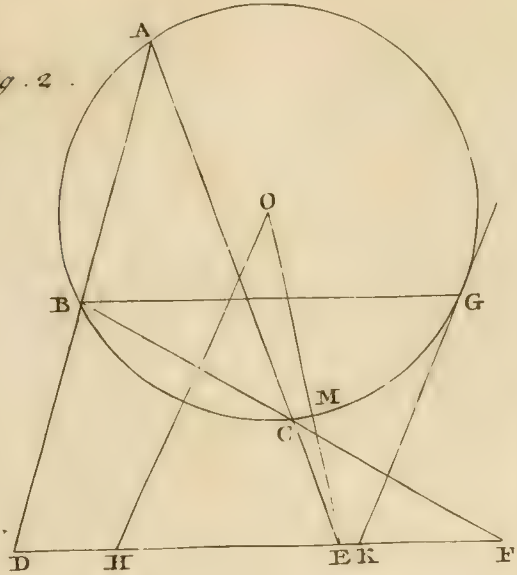


Fig. 3.

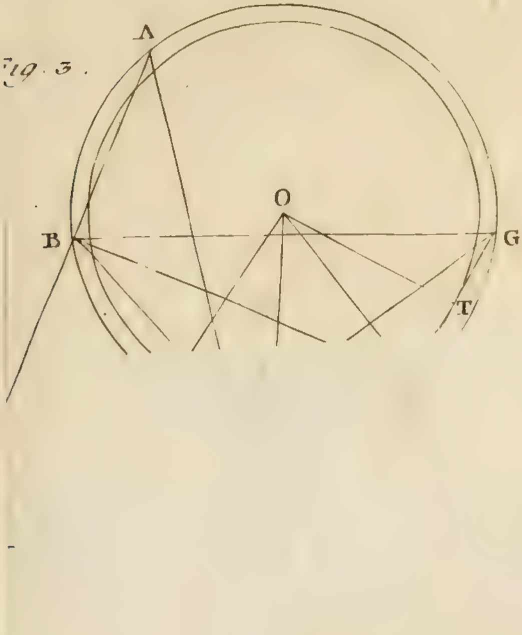


Fig. 1

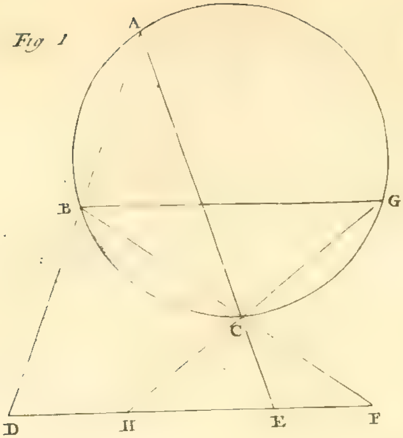


Fig. 2

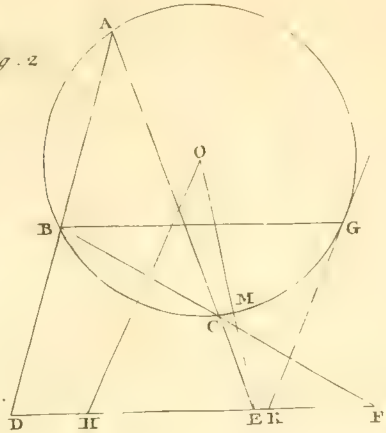
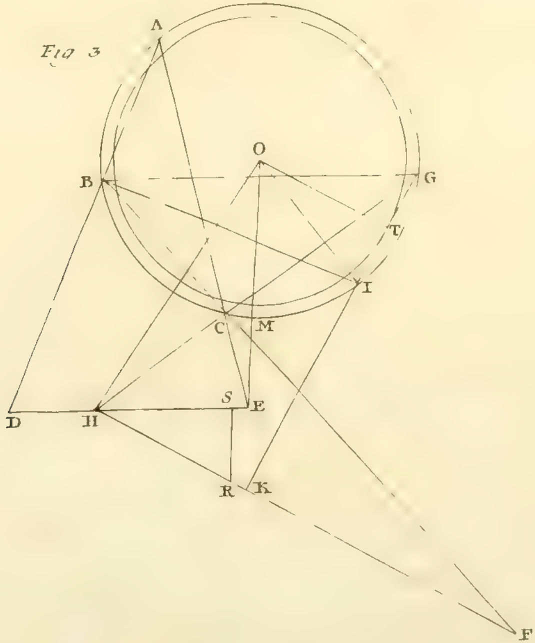
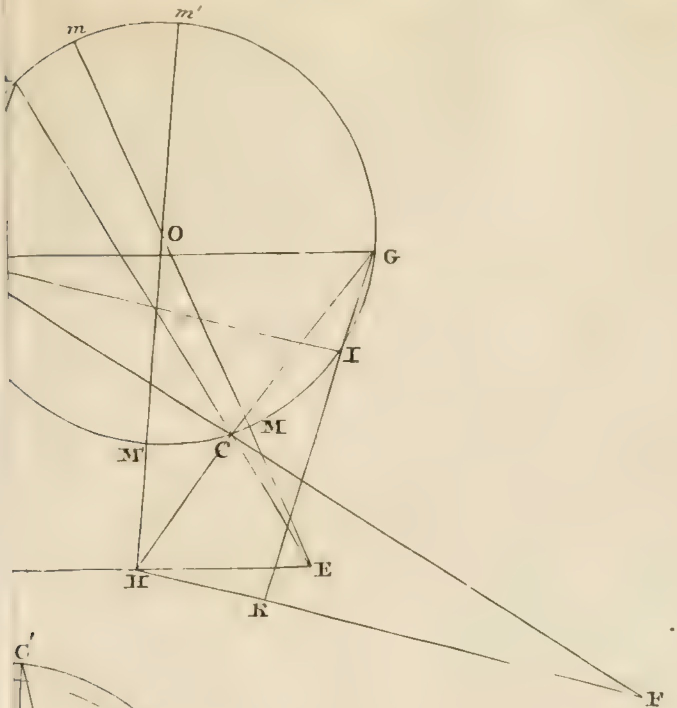


Fig. 3





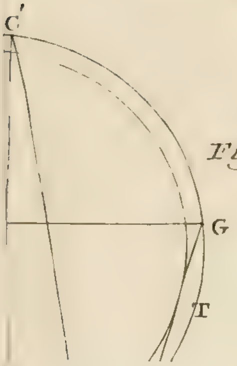
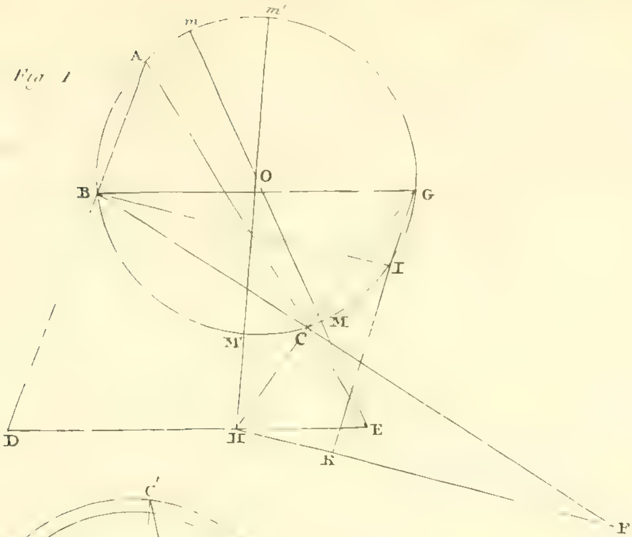
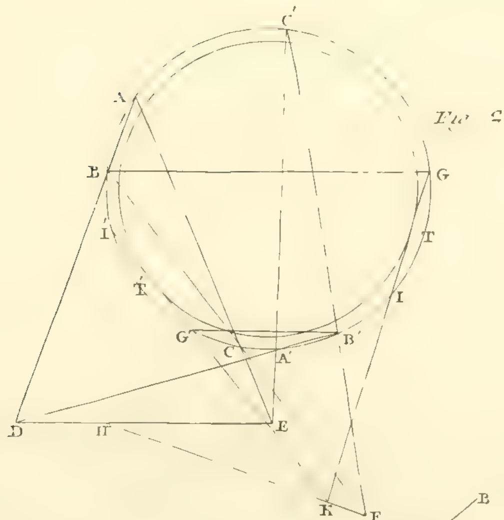
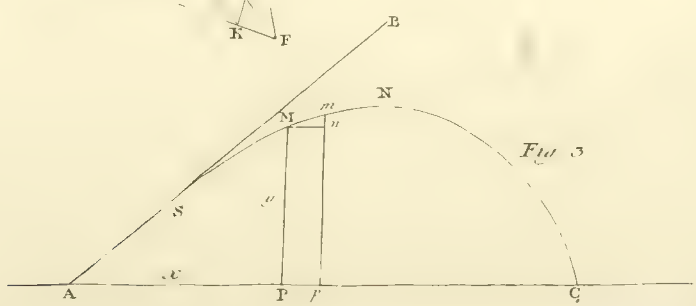


Fig. 2.


Fig. 1
m
m′
A
O
B
G
I
M
M′
C
D
H
E
K
F


C′
A
Fig. 2
B
G
I
T
T
I
G′
C
A′
B′
D
H
E
K
F


B
N
M
m
n
Fig. 3
S
y
x
A
P
p
C

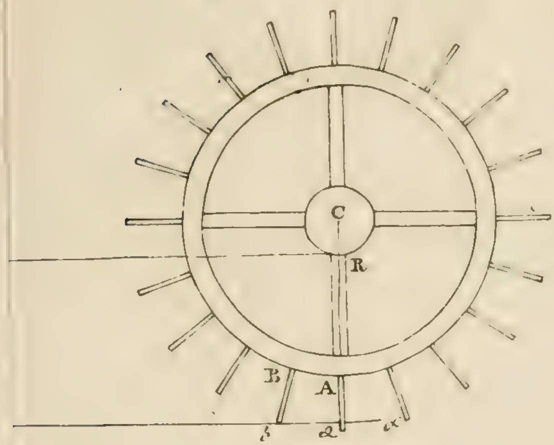
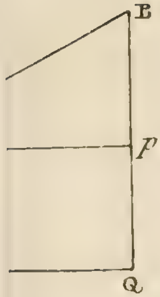


Fig 4.



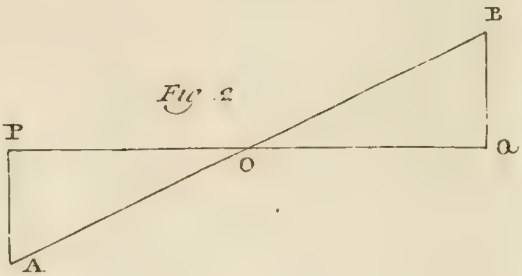


Fig 2.

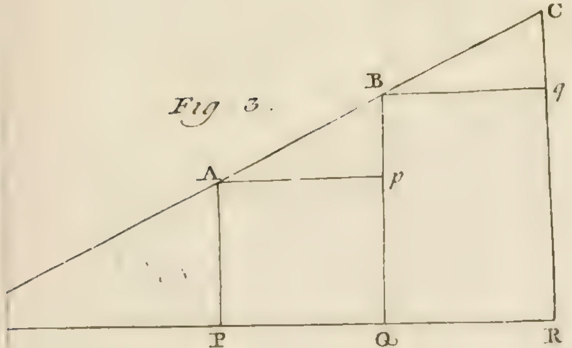


Fig 3.

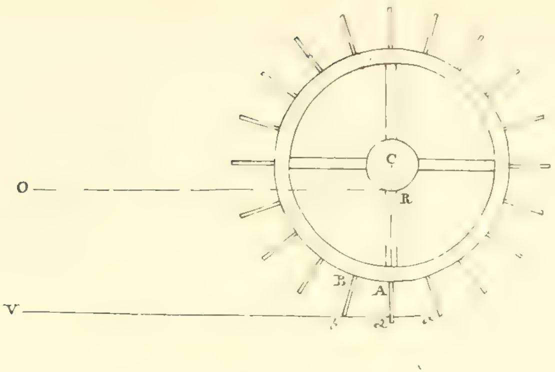


Fig. 4

Fig. 1

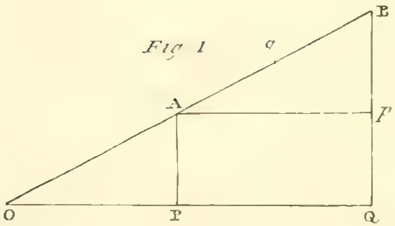


Fig. 2

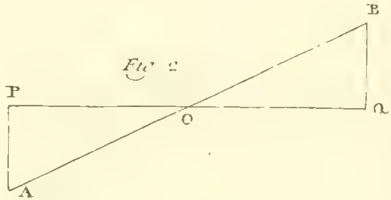
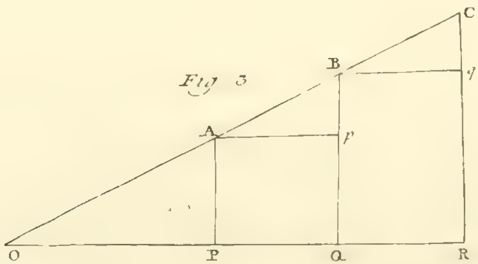
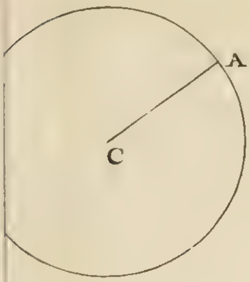


Fig. 3





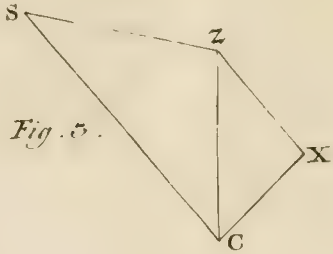


Fig. 5.

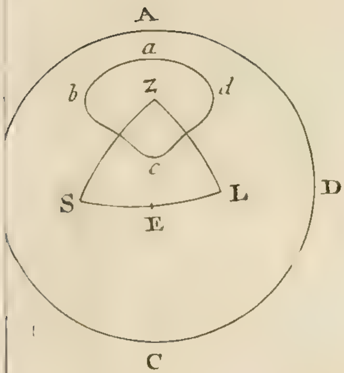


Fig. 6.

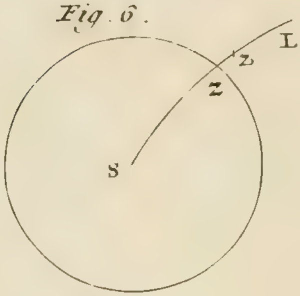


Fig. 4.



Fig. 7.

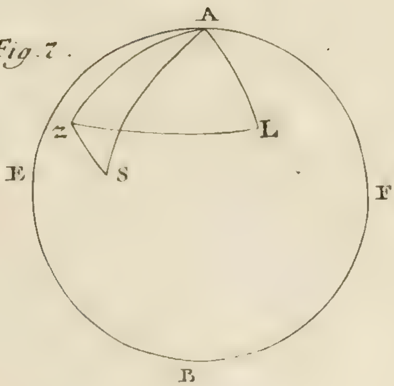
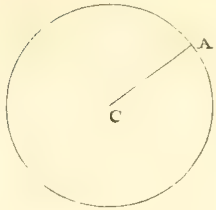


Fig 2



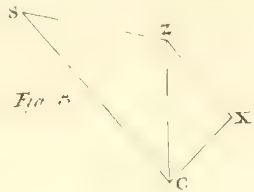


Fig 3

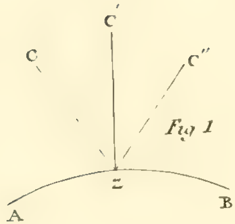


Fig 1

Fig 5

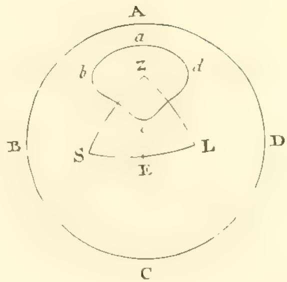
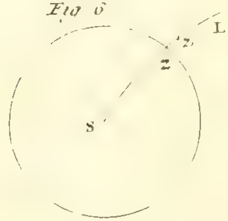


Fig 6



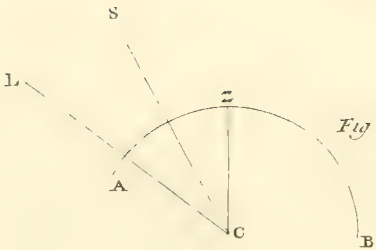
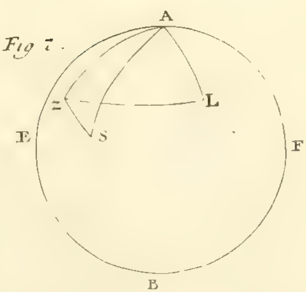
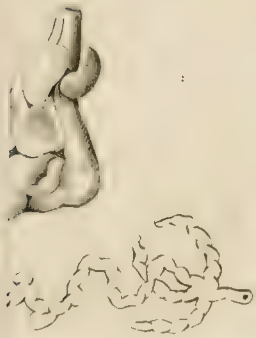


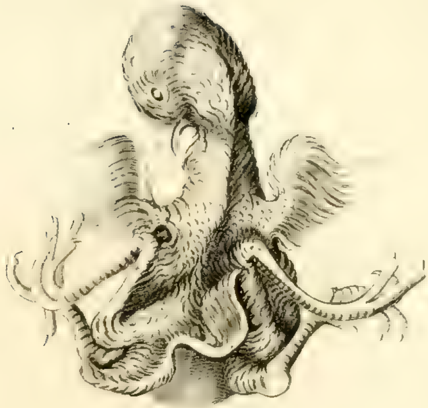
Fig 4

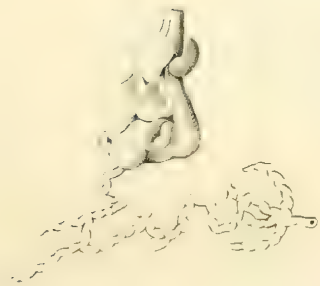
Fig 7.

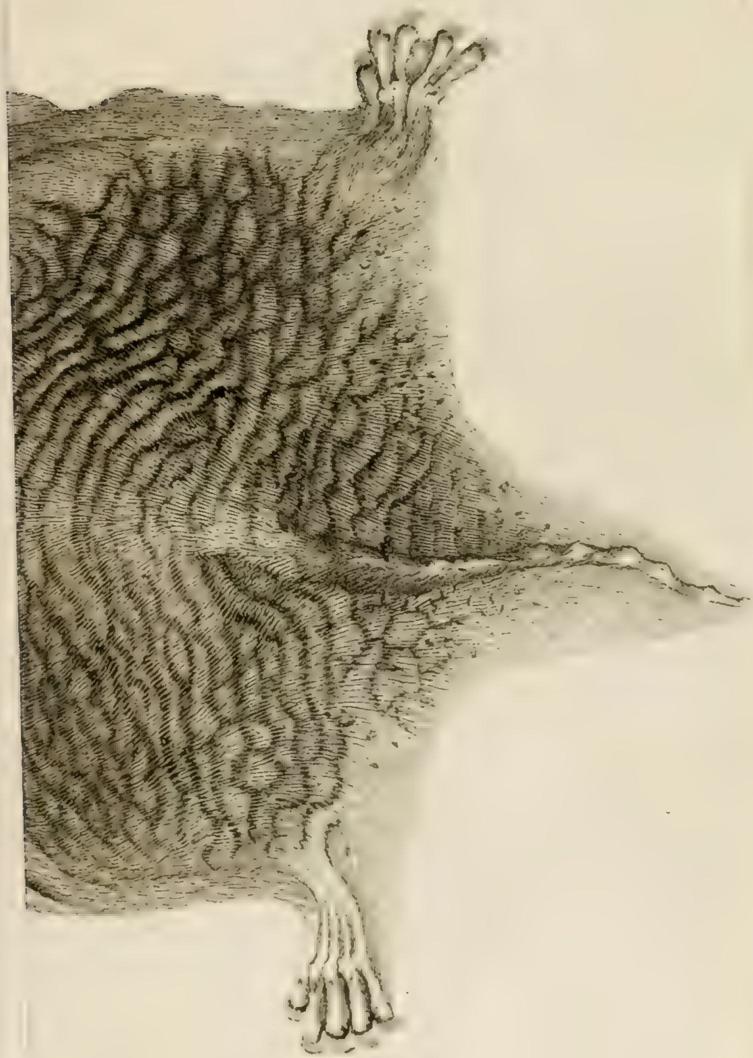












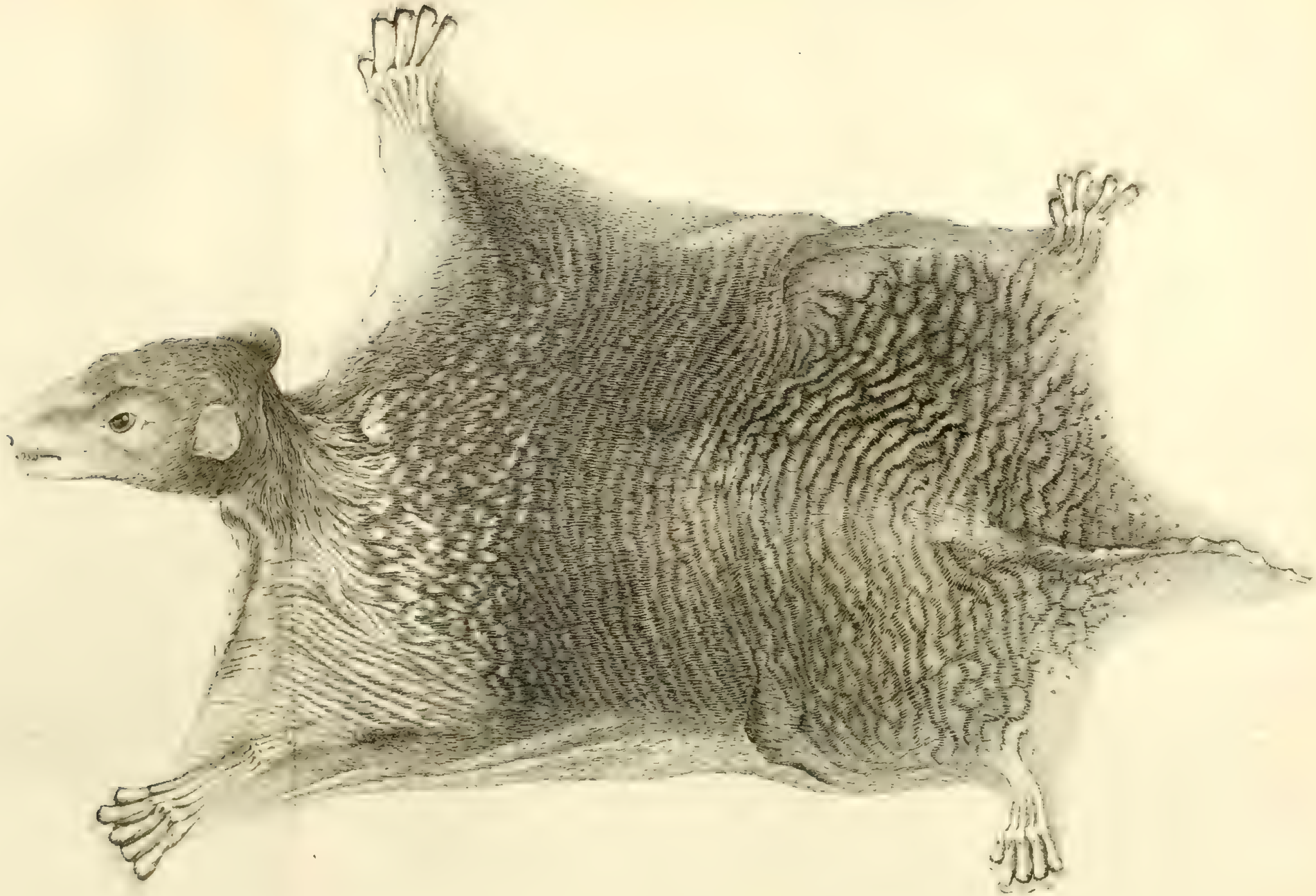
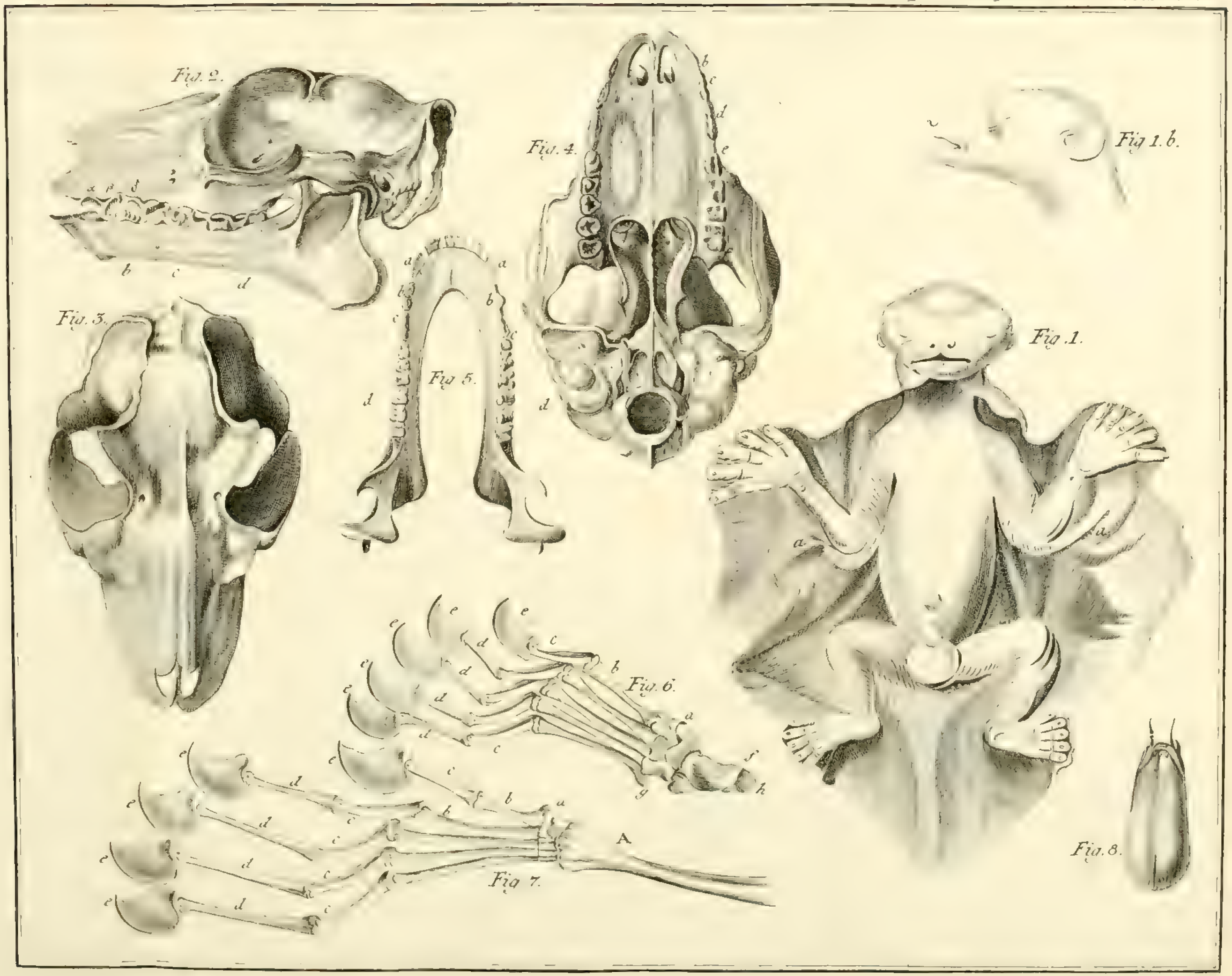
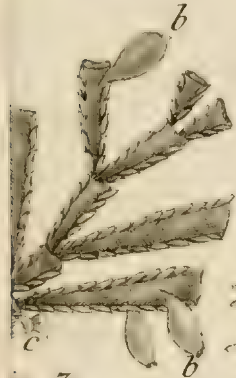



Fig. 1. b.
Fig. 1.
a.
a.
Fig. 8.


Fig. 2.
Fig. 4.
Fig 1. b.
Fig. 3.
Fig 5.
Fig. 1.
Fig. 6.
Fig 7.
Fig. 8.
A



ig. 3.



Fig. 4.



Fig. 1.



Fig. 2.

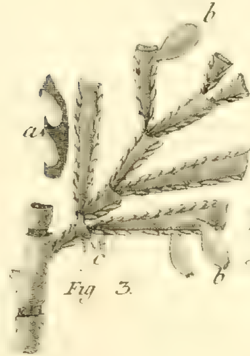


Fig. 3.



Fig. 4.

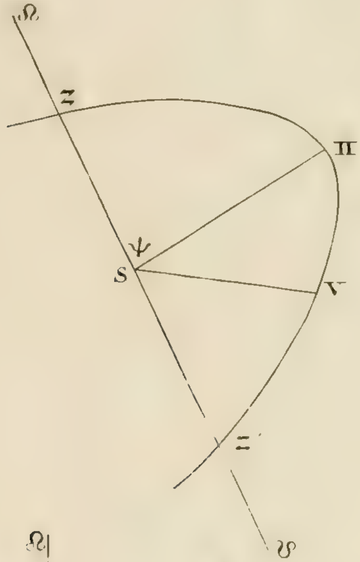


Fig. 2.

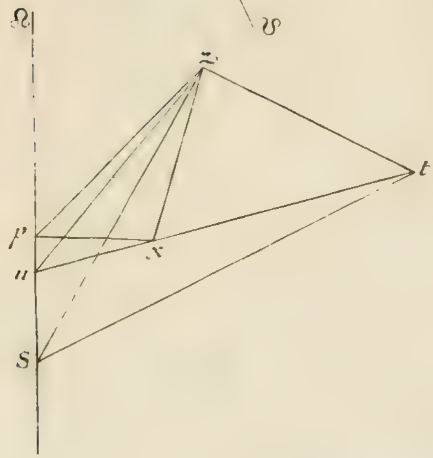


Fig. 4.

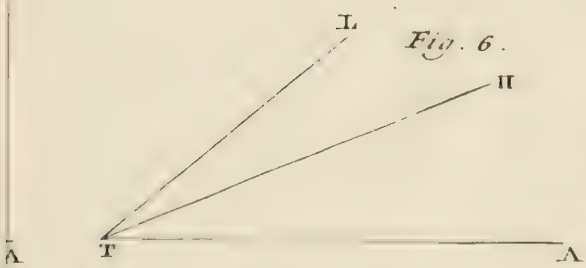


Fig. 6.



Fig 1

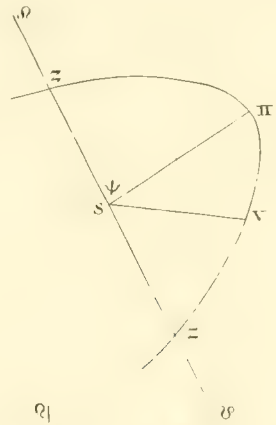


Fig 2

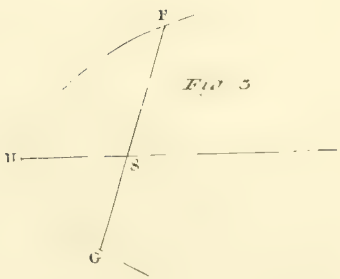
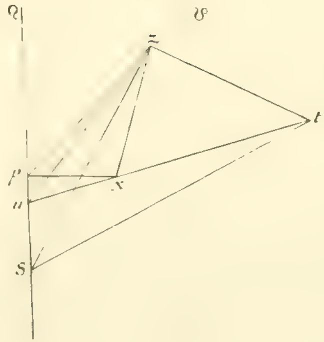


Fig 3

Fig 4



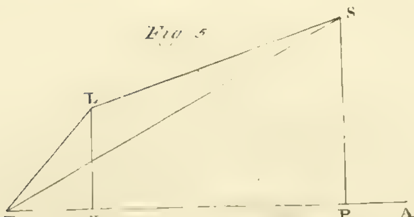


Fig 5

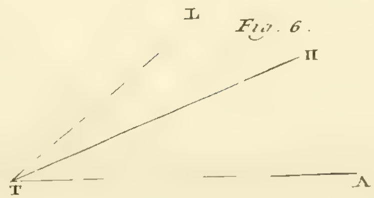


Fig. 6.

Fig. 2.

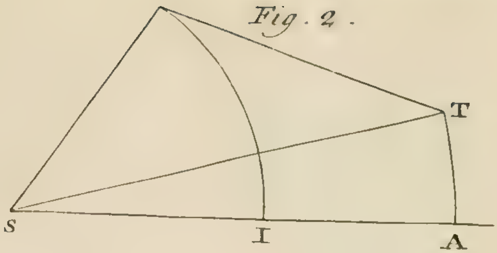


Fig. 4.

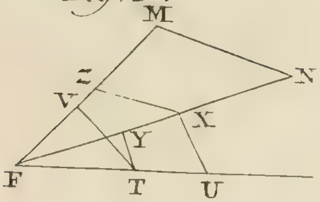


Fig 6.

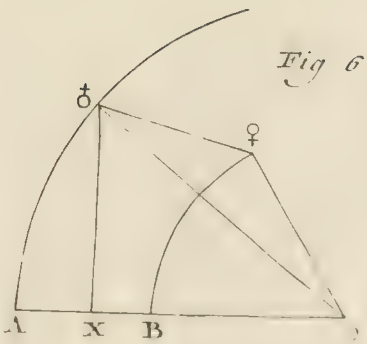


Fig. 1.

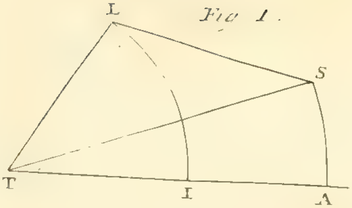


Fig. 2.

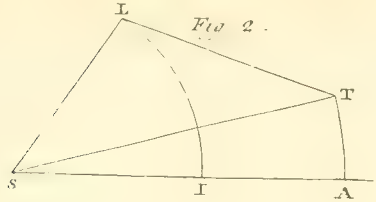


Fig. 3.

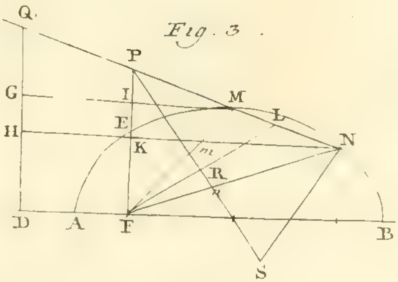


Fig. 4.

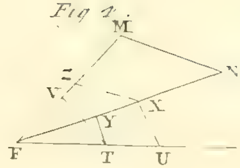


Fig. 5.

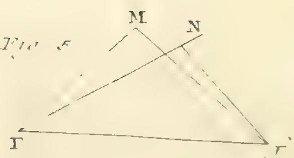
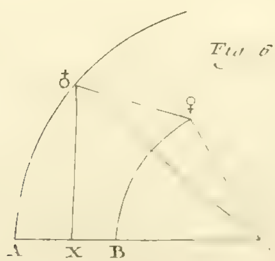


Fig. 6.



Acta acad. scient. Petropol. 1780 P. I.

Wolff de pullo monstroso, quatuor pedibus totidemque alis instructo p. 203. t. VI.

Galeopithecus volans camellis descriptus a Pallas. p. 208. t. VII. VIII

Sertulariae duae determinatae a Lepechin.

1) Sertularia pinaster. p. 223. t IX f. 1. 2.

2.) Sertularia cupressoides p. 224. t. IX. f. 3. 4.

Adipis porcinae recentis et rancidae examen Chemicum auctore Georgi. p. 226.

AMNH LIBRARY
100125008